

Tangentengekoppelte
Raumkurvenpaare
mit proportionalen Bogenlängen

Inaugural-Dissertation

zur Erlangung des Doktorgrades
der Philosophischen Fakultät
der Philipps-Universität zu Marburg

vorgelegt von
Karl Stork
aus Montigny-lès-Metz

Marburg 1949.

Als Dissertation angenommen am 26.10.49
Berichterstatter: Professor Dr. M. Krafft
Mitberichterstatter: Dr. Ostmann
Tag der mündlichen Prüfung: 23.11.49

Gedruckt mit Genehmigung der Fakultät.

Tangentengekoppelte Raumkurvenpaare
mit proportionalen Bogenlängen.

Inaugural-Dissertation

zur Erlangung des Doktorgrades
der Philosophischen Fakultät
der Philipps-Universität zu Marburg

vorgelegt von

Karl Stork

aus Montigny-lès-Metz.



Marburg 1949



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41554030_0035

INHALTSVERZEICHNIS.

Einführung.....	1 - 5
-----------------	-------

ERSTER TEIL

Räumliche Tangentenkopplung mit proportionalen Bogenlängen.

§1	Aufstellung der Vektordifferentialgleichung.....	6 - 7
§2	Das begleitende Dreibein der Kopplungskurve.....	7 -10
§3	Beziehungen zwischen den Bewegungsinvarianten des Kurvenpaares.....	10 -11
§4	Das Umkehrungsproblem.....	11 -12
§5	Das Verhalten der Kopplungskurve im Kollisionspunkt und in dessen Nähe.....	13 -25
§6	Eine Bewegungsinvariante des tangentialgekoppelten Kurvenpaares.....	25 -27

ZWEITER TEIL

Tangentengekoppelte ähnliche Raumkurvenpaare mit proportionalen Bogenlängen.

§1	Integration der Differentialgleichung der ähnlichen Tangentenkopplung.....	28 -30
§2	Die natürlichen Gleichungen des ähnlichen Raumkurvenpaares.....	30 -31
§3	Integration der Frenetschen Differentialgleichungen.....	31 -35
§4	Orientierung des Koordinatensystems.....	35 -39
§5	Die Gleichungen des tangentengekoppelten ähnlichen Raumkurvenpaares.....	39 -41
§6	Tangentengekoppelte ähnliche Raumkurvenpaare in ähnlicher Lage.....	41 -44
§7	Konforme Abbildung des Projektionsträgers auf eine Ebene.....	44 -48
§8	Tangentengekoppelte kongruente Raumkurvenpaare.....	50 -53
§9	Tangentengekoppelte ähnliche ebene Kurvenpaare.....	53 -54

Herrn Professor Dr. Wilhelm Lorey

in Dankbarkeit

gewidmet.

Einführung.

Die Methode, von einer gegebenen Kurve ausgehend nach einer gewissen Erzeugungsvorschrift zu neuen Kurven zu gelangen, hat sich in der geometrischen Forschung als sehr fruchtbar erwiesen und ist oft mit Erfolg angewandt worden. Die Eigenschaften dieser neuen Kurven und ihre Lagebeziehungen zu der gegebenen Kurve, der Stützkurve, werden durch die Eigenschaften eben dieser Kurve und die Erzeugungsvorschrift festgelegt.¹⁾ Als Stützkurve ist jede Kurve zulässig, die gewisse, durch die Erzeugungsvorschrift geforderte Eigenschaften besitzt. Als Erzeugungs- oder Kopplungsvorschrift schließlich ist jede geometrische Vorschrift denkbar, die mit den Axiomen nicht im Widerspruch steht. Die Stützkurve und die aus ihr abgeleitete Kopplungskurve bilden ein Kurvenpaar, dessen Eigenschaften sich aus denjenigen der Einzelkurven und den Lagebeziehungen zusammensetzen.

Ein Problem, das in neuerer Zeit wieder an Interesse gewann und wohl zuerst von Leonardo da Vinci formuliert wurde, wird durch eine Kopplungsvorschrift aufgeworfen, die zu den sogenannten Verfolgungskurven führt. Diese Kopplungsvorschrift ist jedoch durch die einzelnen Bearbeiter des Problems im Laufe seiner Geschichte verschieden formuliert worden. So berichtet Roeser²⁾, daß Bouguer im Jahre 1732 Kurven gefunden hat, "deren von einem bestimmten Punkte ab gemessene Länge proportional ist dem Abschnitt, den die Tangenten in den Endpunkten dieses Kurvenstückes auf einer Geraden heraus schneiden". Es ist leicht zu verifizieren, daß die ebenfalls von Bouguer stammende Formulierung allerdings einer kinematischen Kopplungsvorschrift, wonach sich auf jener Kurve ein Punkt bewegen soll, "der einen anderen, auf einer Geraden sich fortbewegenden" bei konstantem Geschwindigkeitsverhältnis "verfolgt", zu dem selben Ergebnis führt.

Lehmus (1826), den Roeser ebenfalls erwähnt, formuliert die Kopplungsvorschrift folgendermaßen:

"Zwei Punkte, der eine auf einer Geraden, der andere auf einer Kurve, laufen gleichzeitig mit konstanten Geschwindigkeiten los. Die Kurve ist so zu bestimmen, daß die Verbindungslinie der Punkte stets Tangente an die Kurve ist."

Diese Fassung ist durch die Forderung konstanter Geschwindigkeiten zu sehr eingeschränkt. Wenn man die kinematische Formulierung beibehalten will, so ist folgende Fassung der Kopplungsvorschrift allgemeiner:

- a. Das Bahnelement des Verfolgers soll während des gesamten Verfolgungsvorganges auf den Verfolgten gerichtet sein;
- b. das Geschwindigkeitsverhältnis des Verfolgers und Verfolg-

1) Die Stützkurve kann selbstverständlich auch in einen Punkt oder mehrere diskrete Punkte entarten.

2) E. Roeser, Die Verfolgungskurve auf der Kugel; Diss. Halle 1909.

ten soll konstant sein.

In dieser Vorschrift ist also der interessante, von Lehmus formulierte Sonderfall konstanter Geschwindigkeiten enthalten. Er hat jedoch bereits richtig erkannt, daß die kinematische Vorschrift in zwei Teile zerfallen muß. Während der Teil a sowohl die Verfolgungs- als auch die Schleppkurven erzeugt, scheidet Teil b gerade diese aus.¹⁾

Lehnt man aber eine kinematische Formulierung ab und fordert eine rein geometrische, so kann man der Kopplungsvorschrift folgende Fassung geben:

Zu einer gegebenen Stützkurve mit differenzierbaren Krümmungen werde durch einen gegebenen Punkt eine Kopplungskurve gelegt, deren Tangenten auf der Stützkurve proportionale Bogenlängen zu jenen der Kopplungskurve ausschneiden.

Der Vorgang der Erzeugung durch diese Vorschrift möge "Tangentenkopplung mit proportionalen Bogenlängen" heißen. In dieser geometrischen Formulierung kann von einer Bewegung naturgemäß keine Rede mehr sein.

Die ersten Bearbeiter haben sich ausschließlich mit dem ebenen Problem befaßt. Bouguer gibt, wie Roeser anführt, bereits die Gleichung der Verfolgungskurve einer geraden Stützkurve an. Etwas abgeändert lautet sie, wenn $K = ds_1/ds_2$ das Geschwindigkeitsverhältnis bedeutet (s_1 und s_2 sind die Bogenlängen der Stütz- bzw. der Kopplungskurve), und der verfolgte Punkt sich auf der y-Achse eines rechtwinkligen Systems in positiver Richtung bewegt:

$$\frac{y}{v_0} = \frac{K}{1-K^2} + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{1+K} \left(\frac{x}{v_0} \right)^{1+K} - \frac{1}{1-K} \left(\frac{x}{v_0} \right)^{1-K} \right]$$

Das Koordinatensystem ist hier so orientiert, daß beide Achsen Tangenten der Kurve sind. Auf zwei interessante Eigenschaften dieser Kurve sei an dieser Stelle noch hingewiesen:

Ist s_2 die Bogenlänge der Kurve zwischen den Berührungspunkten der Koordinatenachsen, s_1 der Abschnitt auf der y-Achse bis zum Kollisionspunkt und v_0 der Abschnitt auf der x-Achse bis zum Berührungspunkt, so besteht die Beziehung

$$s_1^2 = s_2(s_2 - v_0)$$

die sich im rechtwinkligen Dreieck einfach veranschaulichen läßt. Sind beispielsweise die Abschnitte v_0 und s_1 gegeben, so kann die Bogenlänge der zugehörigen tangentengekoppelten Kurve durch Konstruktion mit Zirkel und Lineal gefunden wer-

1) In der Literatur werden gelegentlich als Verfolgungskurven einer Kurve C auch solche Kurven bezeichnet, die nur die Forderung a erfüllen. Vergl. z.B.:
V. Nobile, Sullo studio intrinseco delle curve di caccia. Rendiconti d. Circolo Matematico di Palermo, XX (1901), 73-82.

den.

Die zweite Eigenschaft betrifft die Krümmung im Kollisionspunkt. Allgemein erhält man für den Krümmungsradius:

$$\frac{\rho}{v_0} = \frac{1}{4K} \left[\left(\frac{x}{v_0} \right)^{\frac{1+2K}{2}} + \left(\frac{x}{v_0} \right)^{\frac{1-2K}{2}} \right]^2$$

Aus der Gleichung der Verfolgungskurve folgt:

Soll eine Kollision ($x = 0$) im Endlichen stattfinden, dann muß $K < 1$ sein.

Die Formel für den Krümmungsradius besagt:

Soll der Krümmungsradius im Kollisionspunkt von Null verschieden sein, dann muß $K \geq \frac{1}{2}$ gefordert werden.

Für praktische Verfolgungsfälle muß also die doppelte Ungleichung

$$\frac{1}{2} \leq K < 1$$

verlangt werden.

Die Behandlung des allgemeinen ebenen Problems stößt insofern auf Schwierigkeiten, als die Differentialgleichung, die schon Maupertuis 1732 hierfür aufstellte¹⁾, nicht geschlossen integrierbar ist. Selbst für den Kreis als Stützkurve ist die Integration allgemein nicht geschlossen durchführbar. Es sind bisher auch keine Fälle bekannt geworden, bei denen das Problem, außer bei der Geraden als Stützkurve, geschlossen integrierbar wäre. Roeser bemerkt sogar, es habe "sich herausgestellt", daß "das Problem nur für die Gerade vollständig durchführbar" sei.

Bis in die neueste Zeit hat das Problem immer wieder Bearbeiter gefunden, von denen zunächst Cesàro²⁾ zu nennen wäre. D'Ocagne, der Begründer der Nomographie, gibt eine elegante Konstruktion der Krümmungsmittelpunkte einer Verfolgungskurve an³⁾. Für den Fall, daß die Stützkurve ein Kreis ist, wurde das Problem von Dunoyer mit den Poincaréschen Methoden untersucht⁴⁾.

Selbst in die Lehrbuchliteratur hat das Problem Eingang gefunden⁵⁾; Gino Loria gibt in seinem Buch "Spezielle ebene Kurven" eine Darstellung über den Stand des Problems.

E. Roeser hat als erster auf Anregung von Gutzmer das Problem auf den Raum übertragen¹⁾. Bei ihm bewegt sich der verfolgte Punkt auf einem Großkreis der Kugel, und die Tangenten an die Verfolgungskurve werden ebenfalls durch Großkreise ersetzt. Wenige Jahre später erweitert, ebenfalls auf Anregung Gutzmers, E. Letz das Problem allgemein auf Rotationsflächen konstanter

1) Roeser L.c.

2) Nouv. Ann. de Math. (3) II, 1883, 85-89

3) d'Ocagne, Bull. Soc. Math. France 11, 1883, 134-136

4) Nouv. Ann. de Math. (4) VI, 1906, 193-222

5) L. Burmester, Lehrbuch der Kinematik, Lpzg. 1886, p. 63.

R. Rothe, Höhere Mathematik, Teil III, Lpzg. u. Berl. 1944.

Krümmung.¹⁾ Die von Roeser und Letz behandelten Fälle sind aber im Grunde wieder das ebene Problem in den Nicht-euklidischen Geometrien.

Das eigentliche räumliche Problem wurde jedoch erst durch die Erfordernisse des zweiten Weltkrieges in Angriff genommen. Bei der Deutschen Forschungsanstalt für Segelflug in Ainring sollen interessante modellmäßige Nachbildungen der Vorgänge angefertigt worden sein. Sonderfälle des räumlichen Problems wurden - wie dem Verfasser von Herrn Professor Dr. A. Walther mitgeteilt wurde - wohl zuerst in seinem "Institut für praktische Mathematik" von Thiel auf Grund der Differentialgleichungen numerisch durchgerechnet. Die Arbeiten von Dobrack und Knothe²⁾, sowie von Fricke³⁾ und von Gerbes⁴⁾, die im Kriege 1939-1945 entstanden sind, sind dem Verfasser leider nicht mehr zugänglich gewesen.

Die vorliegende Arbeit befaßt sich ausschließlich mit dem räumlichen Problem; das ebene Problem ist als Sonderfall hierin enthalten. Zunächst wird angenommen, daß eine beliebige Raumkurve, bis auf die Forderung differenzierbarer Krümmungen, von denen die erste zweimal und die zweite einmal differenzierbar sein sollen, vorgegeben sei. Auf Grund der geometrischen Kopplungsvorschrift werden die Differentialgleichungen der Kopplungskordinaten aufgestellt und Formeln für die natürlichen geometrischen Größen des Kurvenpaares angegeben. Der Begriff "Verfolgungskurve" wird im Interesse einer klaren Abgrenzung zwischen kinematischer und geometrischer Betrachtungsweise grundsätzlich vermieden.

Das Problem ist selbstverständlich umkehrbar. In diesem Fall ist die Kopplungskurve vorgegeben, und es wird nach der Kurve gefragt, auf der durch die Tangenten der Kopplungskurve gleiche Bogenelemente herausgeschnitten werden. Während das Hauptproblem auf eine Differentialgleichung 3. Ordnung führen muß, weil die Anfangsbedingungen durch 3 Raumkoordinaten gegeben sein können, wird das Umkehrungsproblem durch eine Differentialgleichung 1. Ordnung beschrieben, weil der Punkt, durch den die Kurve gelegt werden soll, in seiner Lage insofern beschränkt ist, als er auf einer Tangente der Kopplungskurve liegen muß.

Die Frage des Verhaltens der Kopplungskurve im Kollisionspunkt und in dessen Nähe für eine beliebige Stützkurve

-
- 1) E. Letz, Die Verfolgungskurve des Kehlkreises auf den Rotationsflächen konstanter Krümmung; Diss. Halle, 1912.
 - 2) Dobrack und Knothe, Über einige Arten von Verfolgungskurven; Deutsche Luftfahrtforschung, ZWB, U.u.M. 650
 - 3) Fricke, Verfolgungskurven im Luftkampf; DLF, ZWB, U. u.M. 732.
 - 4) Gerbes, Über Verfolgungskurven, speziell akustische; DLF, ZWB, FB 1999.

wird für gewisse Anfangsbedingungen ausführlich diskutiert.
Es ist aber noch eine andere Fragestellung möglich:

Gegeben seien funktionale Beziehungen zwischen den geometrischen Invarianten zweier Kurven. Die Kurven sind zu bestimmen und ihre gegenseitige Lage ist zu ermitteln, wenn außerdem noch Tangentenkopplung mit proportionalen Bogenlängen gefordert sei. Diese Frage wird in dem zweiten Teil der vorliegenden Arbeit für den Fall tangentegekoppelter ähnlicher Raumkurvenpaare beantwortet und funktionentheoretisch vertieft.

ERSTER TEIL

Räumliche Tangentenkopplung mit proportionalen Bogenlängen.

§ 1

Aufstellung der Vektordifferentialgleichung.

Die Stützkurve mit der Bogenlänge s_1 möge durch den differenzierbaren Vektor $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_1(s_1)$ und die Kopplungskurve mit der Bogenlänge s_2 durch den Vektor $\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_2(s_2)$ dargestellt werden. Ist v der Abstand korrespondierender Punkte beider Kurven, so führt die Anwendung der geometrischen Kopplungsvorschrift nach Abb. 1 zu den beiden Gleichungen:

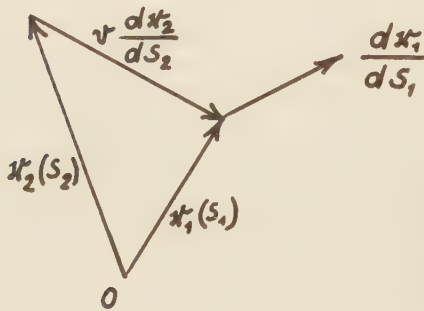


Abb. 1

$$(1) \quad \mathbf{x}_1(s_1) = \mathbf{x}_2(s_2) + v \frac{d\mathbf{x}_2}{ds_2}$$

$$(2) \quad s_1 = \kappa s_2$$

die sich vereinigen lassen zu der Vektordifferentialgleichung:

$$(3) \quad \mathbf{x}_1(s_1) = \mathbf{x}_2\left(\frac{s_1}{\kappa}\right) + v \frac{d\mathbf{x}_2\left(\frac{s_1}{\kappa}\right)}{d\frac{s_1}{\kappa}}$$

Das Problem wäre nun so zu formulieren:

Es ist der Vektor $\mathbf{x}_2\left(\frac{s_1}{\kappa}\right)$ gesucht, der der Differentialgleichung (3) genügt, wenn der Vektor $\mathbf{x}_1(s_1)$ vorgegeben ist.

Mit dem Einheitsvektor $\frac{d\mathbf{x}_2\left(\frac{s_1}{\kappa}\right)}{d\frac{s_1}{\kappa}} = \mathbf{t}_2\left(\frac{s_1}{\kappa}\right)$ nimmt (3) die Form an:

$$(4) \quad \mathbf{x}_1(s_1) = \mathbf{x}_2\left(\frac{s_1}{\kappa}\right) + v \cdot \mathbf{t}_2\left(\frac{s_1}{\kappa}\right)$$

und geht durch Differentiation nach s_1 über in:

$$(5) \quad \mathbf{t}_1(s_1) = \left(\frac{1}{\kappa} + \frac{dv}{ds_1}\right) \mathbf{t}_2 + \frac{v}{\kappa} \frac{d\mathbf{t}_2\left(\frac{s_1}{\kappa}\right)}{d\frac{s_1}{\kappa}}$$

Durch Berücksichtigung der ersten Frenetschen Formel

$$(6) \quad \frac{d\mathbf{t}_2\left(\frac{s_1}{\kappa}\right)}{d\frac{s_1}{\kappa}} = \frac{\mathbf{n}_2\left(\frac{s_1}{\kappa}\right)}{\rho_2\left(\frac{s_1}{\kappa}\right)}$$

mit ρ_2 als erster Krümmungsradius erhält man schließlich:

$$(7) \quad \mathbf{t}_1(s_1) = \left(\frac{1}{\kappa} + \frac{dv}{ds_1}\right)\mathbf{t}_2\left(\frac{s_1}{\kappa}\right) + \frac{v}{\kappa\rho_2\left(\frac{s_1}{\kappa}\right)}\mathbf{n}_2\left(\frac{s_1}{\kappa}\right)$$

Diese Gleichung besagt:

Die Tangente der Stützkurve liegt in der Schmiegungeebene der Kopplungskurve, oder die Tangenten des Kurvenpaares und die Hauptnormale der Kopplungskurve sind komplanare Vektoren.

§ 2

Das begleitende Dreibein der Kopplungskurve.

Bildet $\mathbf{t}_2$ mit $\mathbf{t}_1$ den Winkel φ und die senkrechte Projektion von $\mathbf{t}_2$ auf die Normalebene der Stützkurve mit $\mathbf{n}_1$ den Winkel ψ , so läßt sich $\mathbf{t}_2$ im begleitenden Dreibein der Stützkurve mit den Einheitsbeinen $\mathbf{t}_1, \mathbf{n}_1, \mathbf{b}_1$ darstellen durch:
(s. Abb. 2)

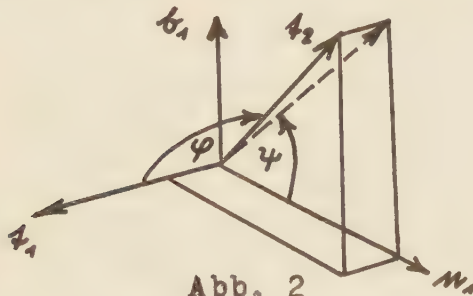


Abb. 2

$$(1) \quad \mathbf{t}_2 = \mathbf{t}_1 \cos \varphi + \mathbf{n}_1 \sin \varphi \cos \psi + \mathbf{b}_1 \sin \varphi \sin \psi$$

Der Einheitsvektor $\mathbf{t}_2$ bestreicht die Einheitskugel einmal eindeutig, wenn φ Werte zwischen den Grenzen

$$(2) \quad 0 \leq \varphi \leq \pi$$

und ψ zwischen den Grenzen

$$(3) \quad -\pi < \psi \leq \pi$$

annimmt.

Durch Anwendung der Frenetschen Formeln für die Stützkurve

$$(a) \quad \frac{d\mathbf{t}_1(s_1)}{ds_1} = \frac{\mathbf{n}_1(s_1)}{\rho_1(s_1)}$$

$$(4)(b) \quad \frac{d\mathbf{n}_1(s_1)}{ds_1} = \frac{-\mathbf{t}_1(s_1)}{\rho_1(s_1)} + \frac{\mathbf{b}_1(s_1)}{\tau_1(s_1)}$$

$$(c) \quad \frac{d\mathbf{b}_1(s_1)}{ds_1} = \frac{-\mathbf{n}_1(s_1)}{\tau_1(s_1)}$$

mit ρ_1 als erster und τ_1 als zweiter Krümmungsradius und der ersten Frenetschen Formel §1 (6) der Kopplungskurve erhält man die Hauptnormale der Kopplungskurve in der Form:

$$(5) \frac{n_2 \left(\frac{s_1}{\kappa} \right)}{\kappa \rho_2 \left(\frac{s_1}{\kappa} \right)} = -t_1 \left(\frac{d\varphi}{ds_1} + \frac{\cos \psi}{\rho_1(s_1)} \right) \cdot \sin \psi + \\ + n_1 \left[\left(\frac{d\varphi}{ds_1} + \frac{1}{\rho_1(s_1) \cos \psi} \right) \cos \varphi \cos \psi - \left(\frac{d\psi}{ds_1} + \frac{1}{\tau_1(s_1)} \right) \sin \varphi \sin \psi \right] + \\ + b_1 \left[\frac{d\varphi}{ds_1} \cos \varphi \sin \psi + \left(\frac{d\psi}{ds_1} + \frac{1}{\tau_1(s_1)} \right) \sin \varphi \cos \psi \right]$$

Da t_1 , t_2 und n_2 komplanare Vektoren sind, folgt aus

$$(6) ([t_1, t_2] n_2) = 0^{1)}$$

durch Benutzung von (1) und (5) die erste Differentialgleichung des Systems:

$$(7) \frac{d\psi}{ds_1} - \frac{\sin \psi}{\rho_1(s_1) \operatorname{tg} \varphi} + \frac{1}{\tau_1(s_1)} = 0$$

Unter Berücksichtigung dieser Beziehung nimmt die Hauptnormale der Kopplungskurve die Form an:

$$(8) n_2 \left(\frac{s_1}{\kappa} \right) = \left[-t_1 \sin \varphi + n_1 \cos \varphi \cos \psi + b_1 \cos \varphi \sin \psi \right] \cdot \\ \cdot \left(\frac{d\varphi}{ds_1} + \frac{\cos \psi}{\rho_1(s_1)} \right) \cdot \kappa \rho_2 \left(\frac{s_1}{\kappa} \right)$$

Aus $b_2 = [t_2 n_2]$ folgt die Binormale der Kopplungskurve:

$$(9) b_2 \left(\frac{s_1}{\kappa} \right) = \left[-n_1 \sin \psi + b_1 \cos \psi \right] \left(\frac{d\varphi}{ds_1} + \frac{\cos \psi}{\rho_1(s_1)} \right) \kappa \rho_2 \left(\frac{s_1}{\kappa} \right)$$

Um die beiden noch ausstehenden Differentialgleichungen des Systems zu erhalten, bildet man aus (1) und (8)

$$(10) t_1(s_1) = t_2 \cos \varphi - \frac{\sin \varphi}{\left(\frac{d\varphi}{ds_1} + \frac{\cos \psi}{\rho_1(s_1)} \right) \kappa \rho_2 \left(\frac{s_1}{\kappa} \right)} \cdot n_2$$

und findet durch Komponentenvergleich mit §1 (7)

$$(11) \frac{1}{\kappa} + \frac{dv}{ds_1} = \cos \varphi$$

$$(12) v = - \frac{\sin \varphi}{\frac{d\varphi}{ds_1} + \frac{\cos \psi}{\rho_1(s_1)}}$$

Das simultane System der Differentialgleichungen 1. Ordnung, das die räumliche Tangentenkopplung mit proportionalen Bogenlängen beschreibt, lautet also:

$$(13) \begin{aligned} (a) \quad & \frac{dv}{ds_1} - \cos \varphi + \frac{1}{\kappa} = 0 \\ (b) \quad & \frac{d\varphi}{ds_1} + \frac{\sin \varphi}{v} + \frac{\cos \psi}{\rho_1(s_1)} = 0 \\ (c) \quad & \frac{d\psi}{ds_1} - \frac{\sin \psi}{\rho_1(s_1) \operatorname{tg} \varphi} + \frac{1}{\tau_1(s_1)} = 0 \end{aligned}$$

Die Elimination von v vermindert die Anzahl der Gleichun-

1) Die $[]$ -Klammer bedeutet das vektorielle und die $()$ -Klammer das skalare Produkt.

gen um 1, während die Ordnung um 1 erhöht wird; man erhält:

$$\begin{aligned}
 (a) \quad & \frac{d^2 \varphi}{ds_1^2} - \left(\frac{2}{\operatorname{tg} \varphi} - \frac{1}{\kappa \sin \varphi} \right) \left(\frac{d\varphi}{ds_1} \right)^2 - \left(\frac{3}{\operatorname{tg} \varphi} - \frac{2}{\kappa \sin \varphi} \right) \frac{\cos \varphi}{\rho_1(s_1)} \frac{d\varphi}{ds_1} - \\
 (14) \quad & - \left[\frac{1}{\rho_1(s_1)} \frac{d\rho_1(s_1)}{ds_1} + \left(\frac{1}{\operatorname{tg} \varphi} - \frac{1}{\kappa \sin \varphi} \right) \frac{\cos \varphi}{\rho_1(s_1)} \right] \frac{\cos \varphi}{\rho_1(s_1)} - \\
 & - \left(\frac{\sin \varphi}{\rho_1(s_1) \operatorname{tg} \varphi} - \frac{1}{\tau_1(s_1)} \right) \frac{\sin \varphi}{\rho_1(s_1)} = 0 \\
 (b) \quad & \frac{d\varphi}{ds_1} - \frac{\sin \varphi}{\rho_1(s_1) \operatorname{tg} \varphi} + \frac{1}{\tau_1(s_1)} = 0
 \end{aligned}$$

Durch Elimination von φ entstünde eine nicht-lineare inhomogene Differentialgleichung 3. Ordnung für φ , deren Integration drei willkürliche Konstanten liefern würde, die durch gewisse vorgegebene Anfangsbedingungen eindeutig bestimmbar sind.

Diese Tatsache ist auch kinematisch ohne weiteres einleuchtend durch die Bemerkung, daß die Verfolgung von jedem Punkt des Raumes aus begonnen werden kann.

Um das begleitende Dreibein der Kopplungskurve nun angeben zu können, ist es nötig, eine Aussage über den Faktor

$$\left(\frac{d\varphi}{ds_1} + \frac{\cos \varphi}{\rho_1(s_1)} \right) \kappa \rho_2 \left(\frac{s_1}{\kappa} \right)$$

zu machen.

Das skalare Quadrat von (8) oder (9) liefert:

$$(15) \quad \left(\frac{d\varphi}{ds_1} + \frac{\cos \varphi}{\rho_1(s_1)} \right)^2 \kappa^2 \rho_2^2 \left(\frac{s_1}{\kappa} \right) = 1$$

Wegen der Eindeutigkeitsforderung (2) besteht:

$$(16) \quad 0 \leq \sin \varphi \leq 1$$

In Verbindung mit $v \geq 0$ als absolute Größe kann daher aus (12) geschlossen werden:

$$\frac{d\varphi}{ds_1} + \frac{\cos \varphi}{\rho_1(s_1)} \leq 0$$

und da der erste Krümmungsradius selbst eine absolute Größe ist, also $\rho_2 \left(\frac{s_1}{\kappa} \right) \geq 0$, folgt unter Beachtung von (15):

$$(17) \quad \left(\frac{d\varphi}{ds_1} + \frac{\cos \varphi}{\rho_1(s_1)} \right) \kappa \rho_2 \left(\frac{s_1}{\kappa} \right) = -1$$

Das begleitende Dreibein der Kopplungskurve besteht wegen (17) dann aus den drei Einheitsvektoren:

$$\begin{aligned}
 (a) \quad & \mathbf{t}_2 \left(\frac{s_1}{\kappa} \right) = \mathbf{t}_1(s_1) \cos \varphi + \mathbf{u}_1(s_1) \sin \varphi \cos \varphi + \mathbf{b}_1(s_1) \sin \varphi \sin \varphi \\
 (18) (b) \quad & \mathbf{u}_2 \left(\frac{s_1}{\kappa} \right) = \mathbf{t}_1(s_1) \sin \varphi - \mathbf{u}_1(s_1) \cos \varphi \cos \varphi - \mathbf{b}_1(s_1) \cos \varphi \sin \varphi \\
 (c) \quad & \mathbf{b}_2 \left(\frac{s_1}{\kappa} \right) = \mathbf{u}_1(s_1) \sin \varphi - \mathbf{b}_1(s_1) \cos \varphi
 \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung besagt, daß die Binormale der Kopplungskurve immer in die Normalebene der Stützkurve fällt und die Schmiegungsebenen beider Kurven den Winkel $\pi - \psi$ miteinander bilden.

Der Vektor der Kopplungskurve läßt sich nach §1 (3) und §2 (1) und (12) formal anschreiben:

$$(19) \quad \pi_2\left(\frac{s_1}{\kappa}\right) = \pi_1(s_1) + \frac{\sin \psi}{\frac{d\varphi}{ds_1} + \frac{\cos \psi}{\rho_1(s_1)}} \cdot \pi_2\left(\frac{s_1}{\kappa}\right)$$

Das Problem der Auffindung tangentegekoppelter Raumkurven bei vorgegebener Stützkurve ist damit zurückgeführt auf die Integration des simultanen Systems (13) von 3 gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung.

§ 3

Beziehungen zwischen den Bewegungsinvarianten des Kurvenpaares.

Zu dem vollständigen Invariantensystem einer Raumkurve, das aus der Flexion und der Torsion der Kurve bestehen mag, kommen im Falle eines Kurvenpaares noch jene Invarianten hinzu, die sich aus den Lagebeziehungen der Einzelkurven ableiten lassen. Da die gegenseitige Lage beider Kurven eindeutig durch den Vektor $\pi_1 - \pi_2$ beschrieben wird, und die Komponenten dieses Vektors im begleitenden Dreibein einer der beiden Kurven gegenüber linearen Koordinatentransformationen invariant sind, bilden die Kopplungskordinaten v, φ, ψ mit Flexion und Torsion beider Kurven ein vollständiges Invariantensystem des Kurvenpaares. In §6 wird allerdings gezeigt werden, daß sich eine einzige Bewegungsinvariante eines tangentegekoppelten Kurvenpaares mit proportionalen Bogenlängen angeben läßt.

Es ist für das vorliegende Problem geradezu kennzeichnend, daß sich einfache Beziehungen zwischen den Bewegungsinvarianten der Einzelkurven und den Kopplungskordinaten angeben lassen. So erhält man aus §2 (17) sofort eine Relation zwischen den ersten Krümmungen der Kurven:

$$(1) \quad \frac{d\varphi}{ds_1} + \frac{1}{\kappa \rho_2\left(\frac{s_1}{\kappa}\right)} + \frac{\cos \psi}{\rho_1(s_1)} = 0$$

Aus einem Vergleich dieser Formel mit der zweiten Gleichung des Systems §2 (13) resultiert noch die oft angewandte Beziehung:

$$(2) \quad \underline{v} = \kappa \rho_2\left(\frac{s_1}{\kappa}\right) \sin \psi$$

Eine Beziehung zwischen den zweiten Krümmungen der Einzelkurven ergibt sich durch Differentiation von §2 (18c) nach s_1 und Anwendung der Frenetschen Formeln; es folgt zunächst:

$$(3) \quad \frac{\pi_2(\frac{s_1}{\kappa})}{\kappa \tau_2(\frac{s_1}{\kappa})} = \frac{\sin \psi}{\rho_1(s_1)} \cdot \frac{1}{\tau_1(s_1)} - \\ - (\pi_1(s_1) \cos \psi + \tau_1(s_1) \sin \psi) \left(\frac{d\psi}{ds_1} + \frac{1}{\tau_1(s_1)} \right)$$

Durch Koeffizientenvergleich mit §2 (18b) erhält man dann die Formeln:

$$(4) \quad \frac{1}{\kappa \tau_2(\frac{s_1}{\kappa})} = \frac{\sin \psi}{\rho_1(s_1) \sin \psi}$$

und

$$(5) \quad \frac{d\psi}{ds_1} - \frac{\cos \psi}{\kappa \tau_2(\frac{s_1}{\kappa})} + \frac{1}{\tau_1(s_1)} = 0$$

Es sei noch bemerkt, daß alle in diesem Paragraphen abgeleiteten Formeln und das simultane System §2 (13) selbstverständlich auch anschaulich geometrisch aus den infinitesimalen Figuren und den Lagebeziehungen des Kurvenpaares abgeleitet werden können. Es bleibt Geschmacksache, welcher Art der Ableitung der Vorzug zu geben wäre.

§4

Das Umkehrungsproblem.

Es gelten wieder die beiden Ansätze §1 (1) und (2);

$$(1) \quad \pi_1(s_1) = \pi_2(s_2) + v \frac{d\pi_2(s_2)}{ds_2}$$

$$(2) \quad s_1 = \kappa s_2$$

Da aber im vorliegenden Fall $\pi_2(s_2)$ als gegeben zu betrachten ist, gilt jetzt:

$$(3) \quad \pi_1(\kappa s_2) = \pi_2(s_2) + v \frac{d\pi_2(s_2)}{ds_2}$$

Diese Gleichung läßt sich mit

$$(4) \quad v = |\pi_1(\kappa s_2) - \pi_2(s_2)|$$

auch schreiben:

$$(5) \quad \frac{\pi_1(\kappa s_2) - \pi_2(s_2)}{|\pi_1(\kappa s_2) - \pi_2(s_2)|} = \frac{d\pi_2(s_2)}{ds_2}$$

Das Umkehrungsproblem läßt sich dann so formulieren:

Es ist bei vorgegebenem Vektor $\pi_2(s_2)$ der Vektor $\pi_1(\kappa s_2)$ so zu bestimmen, daß er die Gleichung (5) befriedigt.

Werden die Kopplungskordinaten beider Kurven beibehalten, so läßt sich das Dreibein von $\pi_1(\kappa s_2)$ nach §2 (18) sofort anschreiben:

$$\begin{aligned}
 (a) \quad \mathcal{L}_1(KS_2) &= \mathcal{L}_2(S_2) \cos \varphi + \mathcal{W}_2(S_2) \sin \varphi \\
 (b) \quad \mathcal{W}_1(KS_2) &= \mathcal{L}_2(S_2) \sin \varphi \cos \psi - \mathcal{W}_2(S_2) \cos \varphi \cos \psi + \mathcal{L}_2(S_2) \sin \psi \\
 (c) \quad \mathcal{L}_1(KS_2) &= \mathcal{L}_2(S_2) \sin \varphi \sin \psi - \mathcal{W}_2(S_2) \cos \varphi \sin \psi - \mathcal{L}_2(S_2) \cos \psi
 \end{aligned}$$

Für die Kopplungskordinate v erhält man durch skalare Multiplikation von §1 (7) mit sich selbst die Differentialgleichung erster Ordnung und zweiten Grades:

$$(7) \quad \left(1 + \frac{dv}{ds_2}\right)^2 + \left(\frac{v}{\rho_2(s_2)}\right)^2 = K^2$$

die sich im allgemeinen nicht geschlossen integrieren läßt. Die Integration dieser Gleichung liefert eine willkürliche Konstante, die durch die Anfangsbedingung festgelegt werden kann. Das Problem liefert aber auch nicht mehr als diese eine willkürliche Integrationskonstante, weil von den Koordinaten des Punktes, durch den die gesuchte Stützkurve gelegt werden soll, nur eine einzige unabhängig veränderlich ist. Die Koordinaten des vorgegebenen Punktes müssen nämlich die Gleichung der Tangente der Kopplungskurve $\mathcal{K}_2(S_2)$ im Berührungspunkte $s_2 = s_{20}$ erfüllen:

$$(8) \quad \mathcal{K} = \mathcal{K}_2(s_{20}) + v \frac{d\mathcal{K}_2(s_{20})}{ds_2}$$

worin v als Parameter zu deuten ist. Zerlegt man den Vektor $\mathcal{K}$ in seine Komponenten, so erkennt man, daß der Wert des Parameters v bereits durch eine Gleichung festgelegt wird.

Hat man das Integral der Gleichung (7) gefunden und die Anfangsbedingung bereits berücksichtigt, so erhält man aus §3 (2):

$$(9) \quad \sin \varphi = \frac{v}{K \rho_2(s_2)}$$

Zur Berechnung von ψ eliminiert man aus §3 (1) und (4) ρ_1 und erhält:

$$(10) \quad \operatorname{tg} \psi = - \frac{\sin \varphi}{\left(\frac{d\varphi}{ds_2} + \frac{1}{\rho_2(s_2)}\right) \tau_2(s_2)}$$

Der Vektor der gesuchten Stützkurve läßt sich dann formal anschreiben:

$$(11) \quad \mathcal{K}_1(KS_2) = \mathcal{K}_2(S_2) + \mathcal{L}_2(S_2) K \rho_2(S_2) \sin \varphi$$

Das Problem der Ermittlung einer auf der durch die Tangenten einer Raumkurve gebildeten Torse liegenden Kurve, auf der durch diese Tangenten gleiche Bogenelemente herausgeschnitten werden, ist damit zurückgeführt auf die Integration einer gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung und zweiten Grades.

§5

Das Verhalten der Kopplungskurve im Kollisionspunkt und in dessen Nähe.

Die Frage nach dem Verhalten der Kopplungskurve im Kollisionspunkt ($v = 0$) und in dessen Nähe besitzt nicht nur ein wissenschaftliches, sondern auch ein erhebliches praktisches Interesse. Bereits in der Einführung wurde auf das eigenartige Verhalten der Flexion der Kopplungskurve einer Geraden hingewiesen, das darin besteht, daß sie für $\frac{1}{2} \leq K < 1$ im Kollisionspunkt verschwindet, während sie für $0 < K < \frac{1}{2}$ dort Unendlich wird. Darüber hinaus interessiert im Falle des allgemeinen räumlichen Problems auch das Verhalten der Torsion und die Frage des Einlaufens der Kopplungskurve in die Stützkurve.

Man kann diese Fragen für gewisse, noch festzulegenden Fälle beantworten, wenn man zunächst einmal annimmt, daß die Bogenlänge erst von dem Punkt ab gemessen wird, für den der erste Kopplungswinkel φ bereits so klein ist, daß der Fehler $\varphi - \sin \varphi$ von da ab immer kleiner bleibt als eine vorgegebene kleine Größe und $\lim_{v \rightarrow 0} \varphi = 0$ stattfindet und daher angenähert $\cos \varphi = 1$

gesetzt werden kann. Diese Einschränkung des Wertebereiches von φ in der Nähe des Kollisionspunktes hat allerdings scheinbar zur Folge, daß alle jene Fälle ausgeschlossen sind, für die eine Kollision mit von Null verschiedenem Kopplungswinkel φ stattfindet. Die Ergebnisse des linearen Problems lassen aber mit einem gewissen Grad von Wahrscheinlichkeit den Schluß zu, daß solche Fälle überhaupt nicht existieren. Angenommen, es gäbe solche Fälle, dann müßte wegen §4 (9) $\rho_2(s_2)$ von gleicher Ordnung gegen Null gehen wie v selbst. Nun zeigt aber die Behandlung des ebenen Problems, daß diese Erscheinung nur für den trivialen Fall $K = 0$ eintritt, und daß $\rho_2(s_2)$ in der Nähe des Kollisionspunktes nur dann von höherer Ordnung gegen Null geht als v selbst, wenn $K < 0$ stattfindet; gerade diese Fälle sind aber selbstverständlich ausgeschlossen. Auf Grund dieser Überlegungen kann man mit einer gewissen Berechtigung sagen, daß die Annahme $\lim_{v=0} \varphi = 0$ zunächst noch keine Beschränkung

der Allgemeinheit bedeutet.

Wesentlich unübersichtlicher liegen die Verhältnisse hinsichtlich des zweiten Kopplungswinkels ψ , weil keine Schlüsse aus den Ergebnissen des linearen Problems gezogen werden können. Es bleibt nur übrig, wegen der aus §3 (4) in Verbindung mit §4 (9) folgenden Beziehung

$$\sin \psi = \frac{\rho_1}{\kappa^2} \frac{v}{\rho_2(s_2) \tau_2(s_2)}$$

zu fordern, daß das Produkt $\rho_2(s_2) \tau_2(s_2)$ im Kollisionspunkt und in dessen Nähe überall von Null verschieden ist oder aber von niedrigerer Ordnung gegen Null geht als v selbst, was dann zur Folge hätte, daß $\sin \psi$ ebenso stark oder stärker gegen Null geht als v selbst. Wenn man auf die Geschlossenheit der Lösung Wert legt, dann ist diese Voraussetzung notwendig, und

man schließt daher alle jene Fälle aus, bei denen die Kollision bei von Null verschiedenem Kopplungswinkel ψ stattfindet. Existieren solche Fälle wirklich, so stellt zwar die Forderung hinsichtlich des Wertebereiches von ψ eine wesentliche Beschränkung der Allgemeinheit dar, sie hat jedoch den Vorzug, zu leicht diskutierbaren geschlossenen Lösungen zu führen.

Da jedoch zunächst noch nichts über das Verhalten von $\rho_2(s_2)$ und $\tau_2(s_2)$ in der Nähe des Kollisionspunktes bekannt ist, bleibt die Zulässigkeit der sich aus den Forderungen über φ und ψ ergebenden Näherung durchaus fraglich. Die Ergebnisse, die jedoch durch die vereinfachten Differentialgleichungen gewonnen werden, sind immerhin von hinreichend praktischem Interesse, daß ihre Unterdrückung nicht gerechtfertigt erscheint, zumal alle übrigen Untersuchungen und Ergebnisse von ihnen vollkommen unabhängig sind.

Unter Verzicht also auf größte Allgemeinheit möge der zweite Kopplungswinkel ψ nur innerhalb vier enger Bereiche betrachtet und die Stützkurve im Kollisionspunkt durch ihre Schmiegunngsschraubenlinie ersetzt werden. Die vier engen Bereiche für ψ mögen in leicht verständlicher Darstellung sein: (Abb. 3)

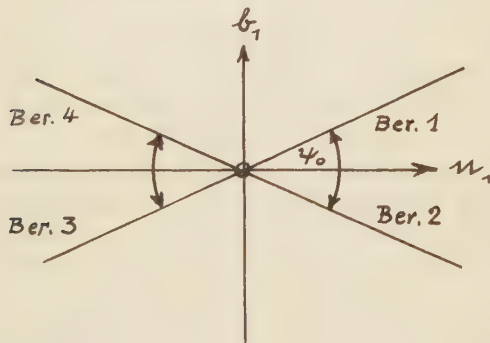


Abb. 3

$|\psi_0|$ werde so klein gewählt, daß ebenfalls $\sin \psi_0 = \psi_0$ und $\cos \psi_0 = 1$ gesetzt werden kann.

Hat die Stützkurve im Kollisionspunkt, zu dem die Bogenlänge s_{10} gehört, die Krümmungen $1/\rho_1(s_{10})$ und $1/\tau_1(s_{10})$, so mögen sie also in den genannten Bereichen für φ und ψ als endlich konstant betrachtet werden:

$$\frac{1}{\rho_1(s_{10})} = \frac{1}{\rho_1}$$

$$\frac{1}{\tau_1(s_{10})} = \frac{1}{\tau_1}$$

Das simultane System §2 (13) nimmt dann die Form an:

$$\begin{aligned} (a) \quad & \frac{dv}{ds_1} + \frac{1-\kappa}{\kappa} = 0 \\ (1)(b) \quad & \frac{d\varphi}{ds_1} + \frac{\varphi}{v} \pm \frac{1}{\rho_1} = 0 \\ (c) \quad & \frac{d\psi}{ds_1} \mp \frac{\psi}{\rho_1 \varphi} \pm \frac{1}{\tau_1} = 0 \end{aligned}$$

Wenn man ψ ersetzt in

Bereich 2 durch $-\psi$

Bereich 3 durch $\psi - \pi$

Bereich 4 durch $\pi - \psi$

erhält man folgende Zuordnung der Vorzeichen:

Gleichung	Glied	Bereich			
		1	2	3	4
(1)(b)	$\frac{1}{\rho_1}$	+	+	-	-
(2)(c)	$\frac{\psi}{\rho_1 \varphi}$	-	-	+	+
(2)(c)	$\frac{1}{\tau_1}$	+	-	+	-

Um nun die Richtigkeit dieses Näherungssystems nachzuweisen, müßte gezeigt werden, daß die Lösungen von (1), die vorübergehend Φ, Ψ, V heißen sollen, sich von den strengen Lösungen des Systems §2 (13) φ, ψ, v nur um Glieder von der Größenordnung s_1^2 unterscheiden. Es wird jedoch von einer anderen Möglichkeit, deren Zulässigkeit wegen der bereits genannten Gründe durchaus fraglich ist, Gebrauch gemacht, die darin besteht, daß man die Richtigkeit des Näherungssystems (1) zunächst voraussetzt und die Gültigkeitsbereiche durch Diskussion der Ergebnisse nachträglich festsetzt.

Das Integral der ersten Differentialgleichung möge dann unter Berücksichtigung der Anfangsbedingung $v(s_1=0) = v_0$ in der Form benutzt werden:

$$(2) \quad \frac{v}{v_0} = 1 - \frac{1-\kappa}{\kappa} \frac{s_1}{v_0}$$

Daraus folgt für den Kollisionspunkt $v = 0$:

$$(3) \quad \frac{s_{10}}{v_0} = \frac{\kappa}{1-\kappa}$$

Damit ein im Endlichen liegender Kollisionspunkt existiert, muß $\kappa \neq 1$ vorausgesetzt werden. Der Fall $\kappa = 0$ möge als trivial ausgeschlossen sein. Als zulässiger, nicht abgeschlossener Bereich möge hier nur gelten:

$$(4) \quad 0 < \kappa < 1$$

Es wird also nur das Stück der Stützkurve mit der Bogenlänge s_{10} betrachtet, das begrenzt wird durch den Punkt $s_1 = 0$ und den Kollisionspunkt $s_1 = s_{10}$, wobei die Bereichslänge noch im einzelnen festzulegen wäre.

Mit

$$(5)(a) \quad 0 \leq \frac{v}{v_0} = \omega \leq 1$$

$$(5) \quad \begin{aligned} (b) \quad \frac{v_0}{\varphi_1} &= \delta \\ (c) \quad \frac{v_0}{\tau_1} &= \varepsilon \end{aligned}$$

können dann die beiden anderen Differentialgleichungen des Systems (1) geschrieben werden:

$$(6) \quad \begin{aligned} (a) \quad \frac{1-\kappa}{\kappa} \frac{d\varphi}{d\omega} - \frac{\varphi}{\omega} - \delta &= 0 \\ (b) \quad \frac{1-\kappa}{\kappa} \frac{d\psi}{d\omega} - \frac{\psi}{\varphi} \delta - \varepsilon &= 0 \end{aligned}$$

Die einzelnen Bereiche für rechtsgewundene Stützkurven sind dann also charakterisiert durch:

$$\begin{aligned} \text{Bereich 1: } \delta &\geq 0 \quad \varepsilon \geq 0 \\ \text{Bereich 2: } \delta &\geq 0 \quad \varepsilon < 0 \\ \text{Bereich 3: } \delta &< 0 \quad \varepsilon \geq 0 \\ \text{Bereich 4: } \delta &< 0 \quad \varepsilon < 0 \end{aligned}$$

Die Gleichungen (6a) und (6b) sind lineare Differentialgleichungen erster Ordnung, von denen (a) die Variable ψ nicht mehr enthält und daher unmittelbar integriert werden kann. Ihr Integral unter Berücksichtigung der Anfangsbedingung $\varphi(\omega=1)=\varphi_0$ lautet:

für $\kappa \neq \frac{1}{2}$

$$(a) \quad \frac{\varphi}{\varphi_0} = \frac{\kappa}{2\kappa-1} \left\{ \left(\frac{2\kappa-1}{\kappa} + \frac{\delta}{\varphi_0} \right) \omega^{\frac{\kappa}{1-\kappa}} - \frac{\delta}{\varphi_0} \omega \right\}$$

(7) und für $\kappa = \frac{1}{2}$

$$(b) \quad \frac{\varphi}{\varphi_0} = \omega \left(1 + \frac{\delta}{\varphi_0} \ln \omega \right)$$

Durch Benutzung dieser Funktion $\varphi = \varphi(\omega)$ und unter Berücksichtigung der Anfangsbedingung $\psi(\omega=1)=\psi_0$ erhält man das Integral von (6b):

für $\kappa \neq \frac{1}{2}$ und $\kappa \neq \frac{2}{3}$

$$(a) \quad \frac{\psi}{\psi_0} = \frac{\kappa}{1-\kappa} \left\{ \frac{\varepsilon}{\psi_0} \omega - \frac{2\kappa-1}{3\kappa-2} \frac{\left[\frac{\delta}{\varphi_0} \frac{\varepsilon}{\varphi_0} + \frac{3\kappa-2}{\kappa} \left(\frac{\varepsilon}{\psi_0} - \frac{1-\kappa}{\kappa} \right) \right] \omega^{\frac{2\kappa-1}{1-\kappa}} - \frac{\delta}{\varphi_0} \frac{\varepsilon}{\psi_0} \omega}{\left(\frac{2\kappa-1}{\kappa} + \frac{\delta}{\varphi_0} \right) \omega^{\frac{2\kappa-1}{1-\kappa}} - \frac{\delta}{\varphi_0}} \right\}$$

(8) für $\kappa = \frac{1}{2}$

$$(b) \quad \frac{\psi}{\psi_0} = \frac{\varepsilon}{\psi_0} \omega + \frac{1 + \frac{\varepsilon}{\psi_0} \left(\frac{\delta}{\varphi_0} - 1 \right) - \frac{\delta}{\varphi_0} \frac{\varepsilon}{\psi_0} \omega}{1 + \frac{\delta}{\varphi_0} \ln \omega}$$

für $K = 2/3$

$$(8)(c) \quad \frac{\psi}{\psi_0} = \omega \left\{ 2 \frac{\varepsilon}{\psi_0} + \frac{2 \frac{\varepsilon}{\psi_0} - 1 + 4 \frac{\delta}{\psi_0} \frac{\varepsilon}{\psi_0} \ln \omega}{2 \frac{\delta}{\psi_0} - (2 \frac{\delta}{\psi_0} + 1) \omega} \right\}$$

Diskussion der Funktion $\varphi = \varphi(\omega)$:

Ist $\frac{K}{1-K}$ eine rationale Zahl und läßt sie sich außerdem auf die Form $\frac{2m+1}{2n}$ bringen (m, n ganze und $2m+1$ und $2n$ teilerfremde Zahlen), so besitzt die Funktion $\varphi = \varphi(\omega)$ im Intervall $0 \leq \omega \leq 1$ zwei Zweige. Der Zweig, der für $\omega = 1$ den Wert $\frac{\varphi(\omega=1)}{\varphi_0} = 1$ annimmt, möge der Hauptzweig der Funktion heißen. Die Diskussion erstreckt sich nur auf diesen Hauptzweig der Funktion.

Der Hauptzweig hat ersichtlich in dem Intervall $0 \leq \omega \leq 1$ außer bei $\omega = 0$ unter gewissen, noch zu formulierenden Bedingungen noch eine Nullstelle, nämlich an der Stelle:

für $K \neq \frac{1}{2}$

$$(9)(a) \quad \omega(\varphi=0) = \omega_0 = \left(1 + \frac{\varphi_0}{\delta} \frac{2K-1}{K} \right)^{-\frac{1-K}{2K-1}}$$

und für $K = \frac{1}{2}$

$$(9)(b) \quad \omega_0 = e^{-\frac{\varphi_0}{\delta}}$$

Die Steigungen des Hauptzweiges der Funktion an den Stellen $\omega = 0, \omega_0, 1$ sind in Tabelle 1 zusammengestellt:

ω	K	$\frac{\delta}{\varphi_0}$	$\frac{1}{\varphi_0} \frac{d\varphi}{d\omega}$
1	$0 < K < 1$	Beliebig	$\frac{K}{1-K} \left(1 + \frac{\delta}{\varphi_0} \right)$
0	$0 < K < \frac{1}{2}$	$\frac{\delta}{\varphi_0} > \frac{1-2K}{K}$	$-\infty$
		$\frac{\delta}{\varphi_0} \leq \frac{1-2K}{K}$	$+\infty$
	$K = \frac{1}{2}$	$\frac{\delta}{\varphi_0} > 0$	$-\infty$
		$\frac{\delta}{\varphi_0} = 0$	1
		$\frac{\delta}{\varphi_0} < 0$	$+\infty$
	$\frac{1}{2} < K < 1$	Beliebig	$-\frac{K}{2K-1} \frac{K}{1-K} \frac{\delta}{\varphi_0}$
ω_0	$0 < K < 1$	$\frac{\delta}{\varphi_0} > \frac{1-2K}{K}$	$\frac{K}{1-K} \frac{\delta}{\varphi_0}$

Tabelle 1

Der Hauptzweig der Funktion besitzt also aus Stetigkeitsgründen im Intervall $0 \leq \omega \leq 1$ sicher keine Nullstelle, wenn $\frac{\delta}{\varphi_0} \leq \frac{1-2K}{K}$ für $0 < K \leq \frac{1}{2}$ und $\frac{\delta}{\varphi_0} < 0$ für $\frac{1}{2} < K < 1$ ist. Der Hauptzweig weist aber auch unter gewissen Bedingungen einen Extremwert auf und zwar an der Stelle:

für $K \neq \frac{1}{2}$

$$(a) \quad \omega_m = \left[\frac{K}{1-K} \left(1 + \frac{\varphi_0}{\delta} \frac{2K-1}{K} \right) \right]^{-\frac{1-K}{2K-1}}$$

(10) und für $K = \frac{1}{2}$

$$(b) \quad \omega_m = e^{-(1 + \frac{\varphi_0}{\delta})}$$

Der extreme Wert der Funktion selbst wird:

$$(11) \quad \frac{\varphi_m}{\varphi_0} = - \frac{\delta}{\varphi_0} \omega_m$$

Wenn also ein Extremwert vorhanden ist, dann ist er bestimmt ein Maximum, wenn $\frac{\delta}{\varphi_0} < 0$ ist. Im Intervall $0 \leq \omega \leq 1$ hat aber der Hauptzweig der Funktion aus Stetigkeitsgründen sicher keinen Extremwert, wenn $-1 < \frac{\delta}{\varphi_0} \leq \frac{1-2K}{K}$ für $0 < K \leq \frac{1}{2}$ und $-1 < \frac{\delta}{\varphi_0} < 0$ für $\frac{1}{2} < K < 1$ ist. Das Minimum für $0 < \frac{\delta}{\varphi_0} \leq \frac{1-2K}{K}$ kommt nicht dem Hauptzweig der Funktion zu.

Zusammenfassend läßt sich sagen:

Der Hauptzweig der Funktion $\frac{\varphi}{\varphi_0} = \frac{1}{\varphi_0} \varphi(\omega)$ ist im Intervall $0 \leq \omega \leq 1$ monoton wachsend, wenn $-1 < \frac{\delta}{\varphi_0} \leq \frac{1-2K}{K}$ für $0 < K \leq \frac{1}{2}$ und $-1 < \frac{\delta}{\varphi_0} < 0$ für $\frac{1}{2} < K < 1$ ist.

Geometrische Deutung:

Das zunächst überraschende Ergebnis, daß der Kopplungswinkel φ auch negative Werte annehmen kann, steht mit der Forderung $0 \leq \varphi \leq \pi$, die aus Gründen der Eindeutigkeit getroffen werden mußte (§2 (2)), im Widerspruch, der sich jedoch durch die Bemerkung rasch beseitigen läßt, daß Gleichung (6a) tatsächlich nur ein ebenes Problem beschreibt, das ebene Problem nämlich, das entsteht, wenn man die Stützkurve durch ihren Krümmungskreis im Kollisionspunkt ersetzt und den Vorgang der Tangentenkopplung nur innerhalb der durch diesen Kreis definierten Ebene betrachtet. Der Winkel φ stellt demnach nicht mehr den Tangentenwinkel des räumlichen Problems dar, sondern den Winkel der Tangenten an den Krümmungskreis und die ebene Kopplungskurve, die das ebene Problem liefert. Er weicht wegen $\operatorname{tg} \varphi_e = \operatorname{tg} \varphi \cos \psi$ (wenn mit φ_e vorübergehend der Tangentenwinkel des ebenen Problems bezeichnet wird) umso mehr von dem wahren Tangentenwinkel φ ab, je näher ψ an $\pm \pi$ liegt. Die Gleichungen (6a,b) verlieren daher ihre Gültigkeit, wenn sich herausstellen sollte, daß $|\psi|$ von einer Stelle ab größer wird als der größte zulässige Wert $|\varphi_0|$. Das ist aber, wie man aus (8) erkennt, immer dann der Fall, wenn φ im Intervall $0 \leq \omega \leq 1$ außer an der Stelle $\omega = 0$ noch eine Nullstelle aufweist; dann nämlich werden die Bereiche 1 und 2 noch vor Erreichung des Kollisionspunktes verlassen, und die Voraussetzungen, die den Gleichungen (6a,b) zugrunde liegen, sind nicht mehr erfüllt. Eine Nullstelle ist aber immer vorhanden, wenn $\frac{\delta}{\varphi_0} > \frac{1-2K}{K}$ für $0 < K \leq \frac{1}{2}$ und $\frac{\delta}{\varphi_0} > 0$ für $\frac{1}{2} < K < 1$ ist. $\frac{\delta}{\varphi_0} > 0$ bedeutet jedoch geometrisch, daß der Anfangspunkt der Kopplungskurve und

der zum Kollisionspunkt gehörende Krümmungsmittelpunkt der Stützkurve auf verschiedenen Seiten der rektifizierenden Ebene im Anfangspunkt eines kleinen Bereiches der Stützkurve liegen, dessen Endpunkt der Kollisionspunkt ist. In diesem Fall, also für $\frac{\delta}{\varphi_0} > \frac{1-2\kappa}{\kappa}$ $0 < \kappa \leq \frac{1}{2}$ und $\frac{\delta}{\varphi_0} > 0$ $\frac{1}{2} < \kappa < 1$ läßt sich sagen, daß die Kopplungskurve die Tendenz zeigt, die rektifizierende Ebene der Stützkurve noch vor Erreichung des Kollisionpunktes zu durchdringen und den Bereichen 3 oder 4 zuzustreben. Für das ebene Problem kann man direkt den Satz aussprechen:

Liegen der Anfangspunkt der Kopplungskurve und der Krümmungsmittelpunkt der Stützkurve auf verschiedenen Seiten der Tangente im Anfangspunkt eines kleinen Bereiches der Stützkurve, dessen Endpunkt der Kollisionspunkt ist, so existiert innerhalb dieses Bereiches eine beiden Kurven gemeinsame Tangente, und die Kopplungskurve besitzt an dieser Stelle einen Wendepunkt, wenn außerdem noch die Bedingung $\frac{\delta}{\varphi_0} > \frac{1-2\kappa}{\kappa}$ für $0 < \kappa \leq \frac{1}{2}$ erfüllt ist.

Der Beweis des ersten Teiles dieses Satzes folgt sofort aus den Bemerkungen über die Nullstellen des Hauptzweiges der Funktion $\frac{\varphi}{\varphi_0} = \frac{1}{\varphi_0} \varphi(\omega)$, während der Beweis des zweiten Teiles durch die Formel für den ersten Krümmungsradius der Kopplungskurve erbracht wird, die sich aus §3 (2) ergibt:

für $\kappa \neq \frac{1}{2}$

$$(a) \quad \frac{\varphi_0}{\varphi_0 \varphi_2(\omega)} = \frac{\kappa^2}{2\kappa-1} \left[\left(\frac{2\kappa-1}{\kappa} + \frac{\delta}{\varphi_0} \right) \omega^{\frac{2\kappa-1}{1-\kappa}} - \frac{\delta}{\varphi_0} \right]$$

(12) und für $\kappa = \frac{1}{2}$

$$(b) \quad \frac{\varphi_0}{\varphi_0 \varphi_2(\omega)} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\delta}{\varphi_0} \ln \omega \right)$$

Diese Funktion hat die gleichen Nullstellen, außer bei $\omega = 0$, wie die Funktion (7). Die ebene Kopplungskurve besitzt also an der Stelle einen Wendepunkt, an der sie die beiden Kurven gemeinsame Tangente durchwandert.

Der Widerspruch, der darin besteht, daß $\varphi_2(\omega)$ nach (12) das Vorzeichen wechselt, während nach differentialgeometrischer Definition φ_2 eine absolute Größe ist, klärt sich ebenso mühelos auf wie derjenige, der sich für φ ergab. Man stelle sich hierbei vor, daß auch eine ebene Kurve eine Binormale besitzt, die sich bei Krümmungswechsel um π dreht.

Besitzt der Hauptzweig der Funktion $\frac{\varphi}{\varphi_0} = \frac{1}{\varphi_0} \varphi(\omega)$ im Intervall $0 \leq \omega \leq 1$ keine Nullstelle, so ist die Gültigkeit der Differentialgleichungen (6a,b) sicher nicht gefährdet, wenn φ keine größeren Werte annimmt als φ_0 ; das ist aber der Fall, wenn $-1 \leq \frac{\delta}{\varphi_0} \leq \frac{1-2\kappa}{\kappa}$ für $0 < \kappa \leq \frac{1}{2}$ und $-1 \leq \frac{\delta}{\varphi_0} < 0$ für $\frac{1}{2} < \kappa < 1$ gewählt wird. Diese Beschränkung für $\frac{\delta}{\varphi_0}$ bedeutet jedoch keine Einschränkung in der Wahl der Stützkurve; sie schließt lediglich den Anfangspunkt des Bereiches, der als "Nähe des Kollisionpunktes" zu gelten hat, in Grenzen ein. Man erkennt aus dieser Bemerkung, daß die Punkte, für die $\frac{\delta}{\varphi_0} > \frac{1-2\kappa}{\kappa}$ bzw. $\frac{\delta}{\varphi_0} > 0$ ist, in diesem Sinn nicht zur "Nähe des Kollisionpunktes" gehören; sie bleiben daher im Folgenden von der Betrachtung ausgeschlossen. Geometrisch hat man aber immer noch zwei Fälle zu unterscheiden: (Tabelle 2)

Im ersten Fall liegen der Anfangspunkt der Kopplungskurve und

Fall	$\frac{\delta}{\varphi_0}$	κ	Bereich
1	$0 \leq \frac{\delta}{\varphi_0} \leq \frac{1-2\kappa}{\kappa}$	$0 < \kappa \leq \frac{1}{2}$	1 und 2
2	$-1 \leq \frac{\delta}{\varphi_0} < 0$	$0 < \kappa < 1$	3 und 4

Tabelle 2

der zum Kollisionspunkt gehörende Krümmungsmittelpunkt der Stützkurve auf verschiedenen Seiten der rektifizierenden Ebene im Anfangspunkt eines kleinen Bereiches der Stützkurve, dessen Endpunkt der Kollisionspunkt ist; die Kopplungskurve bleibt bis zur Erreichung des Kollisionspunktes auf dieser Seite der rektifizierenden Ebene der Stützkurve; ihr Krümmungsradius im Kollisionspunkt verschwindet für $0 \leq \frac{\delta}{\varphi_0} < \frac{1-2\kappa}{\kappa}$ und $0 < \kappa < \frac{1}{2}$ und nimmt für $\frac{\delta}{\varphi_0} = \frac{1-2\kappa}{\kappa}$ und $0 < \kappa \leq \frac{1}{2}$ den Wert $\rho_2(0) = \frac{\varphi_0}{\kappa \varphi_0}$ an.

Im zweiten Fall liegen der Anfangspunkt der Kopplungskurve und der zum Kollisionspunkt gehörende Krümmungsmittelpunkt der Stützkurve auf derselben Seite der rektifizierenden Ebene im Anfangspunkt eines kleinen Bereiches der Stützkurve, dessen Endpunkt der Kollisionspunkt ist; die Kopplungskurve bleibt bis zur Erreichung des Kollisionspunktes auf dieser Seite der rektifizierenden Ebene der Stützkurve; ihr Krümmungsradius im Kollisionspunkt verschwindet für $0 < \kappa \leq \frac{1}{2}$ und nimmt für $\frac{1}{2} < \kappa < 1$ den Wert $\rho_2(0) = \frac{2\kappa-1}{\kappa^2} \rho_1$ an..

Die Diskussion der Funktion $\frac{\psi}{\psi_0} = \frac{\psi(\omega)}{\psi_0}$ erstreckt sich wieder nur auf den Hauptzweig der Funktion, das ist der Zweig, der für $\omega = 1$ den Wert $\frac{\psi(\omega=1)}{\psi_0} = 1$ annimmt. Um die Gültigkeit der Differentialgleichungen (6a,b) nicht zu gefährden, möge außerdem die Größe $\frac{\delta}{\varphi_0}$ immer zwischen den Grenzen $-1 \leq \frac{\delta}{\varphi_0} \leq \frac{1-2\kappa}{\kappa}$ für $0 < \kappa \leq \frac{1}{2}$ und $-1 \leq \frac{\delta}{\varphi_0} < 0$ für $\frac{1}{2} < \kappa < 1$ eingeschlossen sein.

Die Werte des Hauptzweiges und seine Steigung an den Stellen $\omega = 0; 1$ sind in der Tabelle 3 zusammengestellt.

Aus der ersten Zeile der Tabelle 3 entnimmt man, daß die notwendige und hinreichende Bedingung für das Vorhandensein einer positiven Steigung an der Stelle $\omega = 1$ $\frac{\varepsilon}{\psi_0} > \frac{\delta}{\varphi_0}$ ist. Um $\frac{\psi}{\psi_0} > 1$ in der Nähe von $\omega = 1$ im Intervall $0 \leq \omega \leq 1$ auszuschließen, werde die Erfüllung der Bedingung $\frac{\varepsilon}{\psi_0} > \frac{\delta}{\varphi_0}$ immer erzwungen. Wenn es sich um die Bereiche 1 und 2 handelt, also in den Fällen, für die $0 \leq \frac{\delta}{\varphi_0} < \frac{1-2\kappa}{\kappa}$ für $0 < \kappa < \frac{1}{2}$ ist, hat der Hauptzweig der Funktion im Intervall $0 \leq \omega \leq 1$ bestimmt eine Nullstelle, wenn

$$(13a) \quad \frac{\varepsilon}{\psi_0} - \frac{\delta}{\varphi_0} > \frac{\left(\frac{\delta}{\varphi_0} - \frac{2-3\kappa}{2\kappa}\right)^2 + \frac{1}{4} \frac{2-3\kappa}{\kappa} \frac{2-\kappa}{\kappa}}{\frac{2-3\kappa}{\kappa} - \frac{\delta}{\varphi_0}}$$

ist. Die Bedingung $\frac{\varepsilon}{\psi_0} > \frac{\delta}{\varphi_0}$ ist hier immer erfüllt, da die rechte Seite von (13a) eine positive Größe ist; es ist aber sicher keine Nullstelle vorhanden für

$$(13b) \quad 0 < \frac{\varepsilon}{\psi_0} - \frac{\delta}{\varphi_0} < \frac{\left(\frac{\delta}{\varphi_0} - \frac{2-3\kappa}{2\kappa}\right)^2 + \frac{1}{4} \frac{2-3\kappa}{\kappa} \frac{2-\kappa}{\kappa}}{\frac{2-3\kappa}{\kappa} - \frac{\delta}{\varphi_0}}$$

ω	κ	$\frac{\delta}{\varphi_0}$	$\frac{\varepsilon}{\varphi_0}$	$\frac{\psi}{\varphi_0}$	$\frac{1}{\varphi_0} \frac{d\psi}{d\omega}$
1	$0 < \kappa < 1$	$-1 \leq \frac{\delta}{\varphi_0} < \frac{1-2\kappa}{\kappa}$	Beliebig	1	$\frac{\kappa}{1-\kappa} \cdot \left(\frac{\varepsilon}{\varphi_0} - \frac{\delta}{\varphi_0} \right)$
0	$0 < \kappa < \frac{1}{2}$	$-1 \leq \frac{\delta}{\varphi_0} < 0$	$\frac{\varepsilon}{\varphi_0} \left(\frac{2-3\kappa}{\kappa} - \frac{\delta}{\varphi_0} \right) > \frac{1-\kappa}{\kappa} \frac{2-3\kappa}{\kappa}$	1 $-\frac{1-2\kappa}{1-\kappa} \frac{1-2\kappa}{2-3\kappa} \cdot \frac{\varepsilon \left(\frac{2-3\kappa}{\kappa} - \frac{\delta}{\varphi_0} \right) - \frac{1-\kappa}{\kappa} \frac{2-3\kappa}{\kappa}}{\frac{1-2\kappa}{\kappa} - \frac{\delta}{\varphi_0}}$	$-\infty$
			$\frac{\varepsilon}{\varphi_0} \left(\frac{2-3\kappa}{\kappa} - \frac{\delta}{\varphi_0} \right) < \frac{1-\kappa}{\kappa} \frac{2-3\kappa}{\kappa}$		$+\infty$
		$0 \leq \frac{\delta}{\varphi_0} < \frac{1-2\kappa}{\kappa}$	$\frac{\varepsilon}{\varphi_0} \left(\frac{2-3\kappa}{\kappa} - \frac{\delta}{\varphi_0} \right) < \frac{1-\kappa}{\kappa} \frac{2-3\kappa}{\kappa}$		$-\infty$
			$\frac{\varepsilon}{\varphi_0} \left(\frac{2-3\kappa}{\kappa} - \frac{\delta}{\varphi_0} \right) > \frac{1-\kappa}{\kappa} \frac{2-3\kappa}{\kappa}$		$+\infty$
	$\kappa = \frac{1}{2}$	$-1 \leq \frac{\delta}{\varphi_0} < 0$	$\frac{\varepsilon}{\varphi_0} \left(1 - \frac{\delta}{\varphi_0} \right) < 1$	0	$+\infty$
			$\frac{\varepsilon}{\varphi_0} \left(1 - \frac{\delta}{\varphi_0} \right) > 1$		$-\infty$
	$\frac{1}{2} < \kappa < \frac{2}{3}$	$-1 \leq \frac{\delta}{\varphi_0} < 0$	$\frac{\varepsilon}{\varphi_0} \left(\frac{2-3\kappa}{\kappa} - \frac{\delta}{\varphi_0} \right) > \frac{1-\kappa}{\kappa} \frac{2-3\kappa}{\kappa}$		$-\infty$
			$\frac{\varepsilon}{\varphi_0} \left(\frac{2-3\kappa}{\kappa} - \frac{\delta}{\varphi_0} \right) < \frac{1-\kappa}{\kappa} \frac{2-3\kappa}{\kappa}$		$+\infty$
	$\kappa = \frac{2}{3}$	$-1 \leq \frac{\delta}{\varphi_0} < 0$	$\frac{\varepsilon}{\varphi_0} > 0$		$-\infty$
			$\frac{\varepsilon}{\varphi_0} < 0$		$+\infty$
	$\frac{2}{3} < \kappa < 1$	$-1 \leq \frac{\delta}{\varphi_0} < 0$	Beliebig		$-\frac{\kappa}{3\kappa-2} \frac{\varepsilon}{\varphi_0}$

Tabelle 3

Man sieht diese Behauptung sofort ein, wenn man (8a) auf die Form bringt:

$$(14) \quad \frac{\psi}{\varphi_0} = \frac{\kappa}{1-\kappa} \left\{ \frac{\frac{1-\kappa}{2-3\kappa} \frac{\delta}{\varphi_0} \frac{\varepsilon}{\varphi_0} \omega + \frac{\varepsilon}{\varphi_0} \left(\frac{1-2\kappa}{\kappa} - \frac{\delta}{\varphi_0} \right) \omega^{\frac{\kappa}{1-\kappa}}}{\left(\frac{1-2\kappa}{\kappa} - \frac{\delta}{\varphi_0} \right) \omega^{-\frac{1-2\kappa}{1-\kappa}} + \frac{\delta}{\varphi_0}} - \frac{1-2\kappa}{2-3\kappa} \frac{\frac{\varepsilon}{\varphi_0} \left(\frac{2-3\kappa}{\kappa} - \frac{\delta}{\varphi_0} \right) - \frac{1-\kappa}{\kappa} \frac{2-3\kappa}{\kappa}}{\left(\frac{1-2\kappa}{\kappa} - \frac{\delta}{\varphi_0} \right) \omega^{-\frac{1-2\kappa}{1-\kappa}} + \frac{\delta}{\varphi_0}} \omega^{-\frac{1-2\kappa}{1-\kappa}} \right\}$$

Für $\frac{\varepsilon}{\varphi_0} \left(\frac{2-3\kappa}{\kappa} - \frac{\delta}{\varphi_0} \right) < \frac{1-\kappa}{\kappa} \frac{2-3\kappa}{\kappa}$ enthalten Zähler und Nenner nur positive Glieder. Dieses Ergebnis läßt sogleich eine geometrische Deutung zu:

Wählt man den Anfangspunkt der Kopplungskurve so, daß er mit

dem Krümmungsmittelpunkt der Stützkurve auf verschiedenen Seiten der rektifizierenden Ebene und mit dem Mittelpunkt der Schmiegunskugel auf verschiedenen Seiten der Schmiegungebene im Anfangspunkt eines kleinen Bereiches der Stützkurve liegt, dessen Endpunkt der Kollisionspunkt ist, und wird $\frac{\delta}{\varphi_0} < \frac{1-2K}{K}$ für $0 < K < \frac{1}{2}$, dann

durchstößt die Kopplungskurve die Schmiegungebene der Stützkurve auf der gleichen Seite der rektifizierenden Ebene noch vor Erreichung des Kollisionspunktes, wenn der Kopplungswinkel ψ_0 kleiner gewählt wird als ein gewisser Winkel, der sich aus der Bedingung (13a) ergibt; sie durchdringt aber die Schmiegungebene nicht vor Erreichung des Kollisionspunktes, wenn der Kopplungswinkel ψ_0 größer angenommen wird als dieser eben genannte Winkel. Die begleitenden Dreibeine im Kollisionspunkt beider Kurven haben eine gemeinsame Tangente und sind um diese um den Winkel $\pi + \psi(0)$ gedreht, wobei

$$(15) \quad \frac{\psi(0)}{\psi_0} = - \frac{K}{1-K} \frac{1-2K}{2-3K} \frac{\frac{\varepsilon}{\psi_0} \left(\frac{2-3K}{K} - \frac{\delta}{\varphi_0} \right) - \frac{1-K}{K} \frac{2-3K}{K}}{\frac{1-2K}{K} - \frac{\delta}{\varphi_0}}$$

ist. Eine obere Grenze für $\frac{\varepsilon}{\psi_0} - \frac{\delta}{\varphi_0}$ im Falle (13a) ergibt sich aus $\left| \frac{\psi(0)}{\psi_0} \right| \leq 1$.

In den Bereichen 3 und 4, also für $-1 \leq \frac{\delta}{\varphi_0} < 0$, hat der Hauptzweig der Funktion im Intervall $0 \leq \omega \leq 1$ für $0 < K \leq \frac{2}{3}$ sicher eine Nullstelle, wenn die Bedingung (13a) erfüllt ist; der Hauptzweig weist aber auch in diesem Fall ein Maximum auf, und die obere Grenze für $\frac{\varepsilon}{\psi_0} - \frac{\delta}{\varphi_0}$ folgt aus $\left| \frac{\psi_{min}}{\psi_0} \right| \leq 1$.

Wegen

$$(16) \quad \frac{\delta}{\varphi_0} \frac{\varepsilon}{\psi_0} < \frac{\frac{1-K}{K} \frac{2-3K}{K} \frac{\delta}{\varphi_0}}{\frac{2-3K}{K} - \frac{\delta}{\varphi_0}} \leq 0$$

liegen der Anfangspunkt der Kopplungskurve und der Mittelpunkt der Schmiegunskugel der Stützkurve auf derselben Seite der Schmiegungebene im Anfangspunkt eines kleinen Bereiches der Stützkurve, dessen Endpunkt der Kollisionspunkt ist; die Kopplungskurve durchstößt noch vor Erreichung des Kollisionspunktes die Schmiegungebene der Stützkurve, und der Kopplungswinkel ψ nimmt im Kollisionspunkt den Wert $\pi + \psi(0)$ für $0 < K < \frac{1}{2}$ und den Wert π für $\frac{1}{2} \leq K \leq \frac{2}{3}$ an. Die Dreibeine im Kollisionspunkt beider Kurven haben eine gemeinsame Tangente und sind um diese für $0 < K < \frac{1}{2}$ um den Winkel $\psi(0)$ gedreht, während sie für $\frac{1}{2} \leq K \leq \frac{2}{3}$ zusammenfallen.

Ist aber ψ_0 in dem Bereich 3 oder 4 so gewählt, daß die Bedingung (13b) erfüllt ist, und ist $0 < K \leq \frac{2}{3}$, dann weist der Hauptzweig der Funktion keine Nullstelle auf; die Kopplungskurve erreicht also auf der Seite der Schmiegungebene der Stützkurve den Kollisionspunkt, auf der ihr Anfangspunkt liegt. Von den Dreibeinen im Kollisionspunkt gilt dasselbe, was im letzten Absatz gesagt wurde.

Für $2/3 < K < 1$ ist in den Bereichen 3 und 4 sicher eine Nullstelle des Hauptzweiges vorhanden, wenn $\frac{\varepsilon}{\varphi_0} > 0$ ist; die Kopplungskurve wird also auch in diesem Fall die Schmiegungeebene der Stützkurve passieren und auf der Seite der Schmiegungeebene den Kollisionspunkt erreichen, die dem Mittelpunkt der Schmiegungekugel der Stützkurve abgekehrt ist. Ist dagegen φ_0 von vornherein so gewählt, daß $\frac{\varepsilon}{\varphi_0} < 0$ ist, jedoch noch so groß, daß die Bedingung $\frac{\varepsilon}{\varphi_0} > \frac{\delta}{\varphi_0}$ nicht verletzt wird, dann liegt keine Nullstelle des Hauptzweiges der Funktion vor. In diesem Fall befindet sich also der Anfangspunkt der Kopplungskurve sogleich auf der dem Mittelpunkt der Schmiegungekugel abgekehrten Seite der Schmiegungeebene der Stützkurve, und der Kollisionspunkt wird auf dieser Seite der Schmiegungeebene erreicht. Das Kurvenpaar hat im Kollisionspunkt ein gemeinsames begleitendes Dreibein.

Zusammenfassend mögen noch einmal die Bereiche für $\frac{\delta}{\varphi_0}$ und $\frac{\varepsilon}{\varphi_0}$ angegeben werden, in denen die Differentialgleichungen §2 (13) durch die Gleichungen (6a,b) näherungsweise ersetzt werden können (Tabelle 4):

K	$\frac{\delta}{\varphi_0}$	$\frac{\varepsilon}{\varphi_0}$
$0 < K < \frac{1}{2}$	$-1 \leq \frac{\delta}{\varphi_0} \leq \frac{1-2K}{K}$	$\frac{\delta}{\varphi_0} \leq \frac{\varepsilon}{\varphi_0} \leq \frac{1-K}{K} \frac{2-3K}{1-2K} \frac{2 \frac{1-2K}{K} - \frac{\delta}{\varphi_0}}{\frac{2-3K}{K} - \frac{\delta}{\varphi_0}}$
$\frac{1}{2} \leq K < 1$	$-1 \leq \frac{\delta}{\varphi_0} \leq 0$	$\frac{\delta}{\varphi_0} \leq \frac{\varepsilon}{\varphi_0} \leq \frac{\varepsilon}{\varphi_0} \left(\left \frac{\varphi_{min}}{\varphi_0} \right = 1 \right)$

Tabelle 4

Bei der Festsetzung der größten zulässigen Anfangswerte der Kopplungskordinaten hat man nun nach folgendem Schema zu verfahren:

Man gibt den Kopplungswinkel φ_0 vor, allerdings höchstens so groß, daß der Fehler $\varphi_0 - \sin \varphi_0$ eine gewisse vorgegebene Größe nicht überschreitet. Hat man sich für ein in den zulässigen Grenzen liegendes $\frac{\delta}{\varphi_0}$ entschieden, so ist $\varphi_0 = \varphi_1 \varphi_0 \left| \frac{\delta}{\varphi_0} \right|$. In der Wahl für φ_0 ist man dann nur noch innerhalb der in Tabelle 4 angegebenen Grenzen für $\frac{\varepsilon}{\varphi_0} = \frac{\varphi_0}{\varphi_1}$ frei.

Während der Krümmungsradius der Kopplungskurve im Kollisionspunkt im wesentlichen nur für $\frac{1}{2} \leq K < 1$ ein reguläres Verhalten zeigt, ist der K -Bereich für eine wohldefinierte Torsion noch kleiner. Nach §3 (4) erhält man allgemein:

$$(17) \quad \frac{1}{\tau_2(\omega)} = K \frac{\varphi}{\rho_1 \varphi}$$

Nachdem nun das Verhalten der Kopplungswinkel bekannt ist, kommt es nun auf die Diskussion des Quotienten $\frac{\varphi}{\rho_1}$ an. Man weist leicht nach, daß die Torsion $\frac{1}{\tau_2}$ im Kollisionspunkt für $0 < K \leq 2/3$ nicht mehr definiert ist; dagegen nimmt sie für $2/3 < K < 1$ den endlichen Wert

$$(18) \quad \frac{1}{\tau_2(0)} = \kappa \frac{2\kappa-1}{3\kappa-2} \frac{1}{\tau_1}$$

an. In praktischen räumlichen Verfolgungsfällen sind also die Grenzen für das zulässige Geschwindigkeitsverhältnis noch enger gesteckt als beim ebenen Problem, für das der Krümmungsradius allein maßgebend ist.

Um eine anschauliche Vorstellung von der Form der Kopplungskurve in der Nähe des Kollisionspunktes zu erhalten, benutzt man zweckmäßig die ersten Glieder der kanonischen Entwicklung der Stützkurve im Kollisionspunkt. Man erhält dann, bereits etwas umgeformt und wieder mit $\omega = \frac{v}{v_0}$ als Parameter:

$$(19) \quad \begin{aligned} (a) \quad \frac{x_1}{v_0} &= - \frac{\kappa}{1-\kappa} \omega \\ (b) \quad \frac{y_1}{v_0 \varphi_0} &= \frac{1}{2} \frac{\left(\frac{\delta}{\varphi_0}\right)^2}{\left|\frac{\delta}{\varphi_0}\right|} \left(\frac{\kappa}{1-\kappa}\right)^2 \omega^2 \\ (c) \quad \frac{z_1}{v_0 \varphi_0 \psi_0} &= - \frac{1}{6} \frac{\left(\frac{\delta}{\varphi_0}\right)^2 \left(\frac{\varepsilon}{\psi_0}\right)^2}{\left|\frac{\delta}{\varphi_0}\right| \left|\frac{\varepsilon}{\psi_0}\right|} \left(\frac{\kappa}{1-\kappa}\right)^3 \omega^3 \end{aligned}$$

Bezugssystem ist das begleitende Dreibein im Kollisionspunkt der Stützkurve. Sind seine Einheitsbeine $i, j, \mathcal{P}$, dann ist das begleitende Dreibein der Stützkurve in der Nähe des Kollisionspunktes unter Weglassung der Glieder, die in der Entwicklung der Kopplungskurve von höherer als 3. Ordnung in den Kopplungskoordinaten klein werden:

$$(20) \quad \begin{aligned} (a) \quad i_1 &= i_1 - \delta \frac{\kappa}{1-\kappa} \omega j + \frac{\delta \varepsilon}{2} \left(\frac{\kappa}{1-\kappa}\right)^2 \omega^2 \mathcal{P} \\ (b) \quad u_1 &= j - \varepsilon \frac{\kappa}{1-\kappa} \omega \mathcal{P} \\ (c) \quad \mathcal{P}_1 &= \mathcal{P} \end{aligned}$$

Die Einheitstangente der Kopplungskurve wird dann nach §2 (1):

$$(21) \quad i_2 = i + \left(\varphi - \delta \frac{\kappa}{1-\kappa} \omega\right) j + \left[\varphi \psi - \varphi \varepsilon \frac{\kappa}{1-\kappa} \omega + \frac{\delta \varepsilon}{2} \left(\frac{\kappa}{1-\kappa}\right)^2 \omega^2\right] \mathcal{P}$$

Für die Kopplungskurve in der Nähe des Kollisionspunktes erhält man nach §2 (19) und mit Benutzung der Formeln (7) und (8) die in den Bereichen der Tabelle 4 gültige allgemeine Darstellung:

$$(22) \quad \begin{aligned} (a) \quad \frac{x_2}{v_0} &= - \frac{1}{1-\kappa} \omega \\ &\text{für } \kappa \neq \frac{1}{2} \\ (b) \quad \frac{y_2}{v_0 \varphi_0} &= \frac{\frac{\delta}{\varphi_0}}{\left|\frac{\delta}{\varphi_0}\right|} \frac{\kappa}{2\kappa-1} \left\{ \frac{1}{2} \frac{\kappa}{(1-\kappa)^2} \frac{\delta}{\varphi_0} \omega^2 - \left(\frac{2\kappa-1}{\kappa} + \frac{\delta}{\varphi_0}\right) \omega^{\frac{1}{1-\kappa}} \right\} \\ &\text{für } \kappa \neq 2/3 \\ (c) \quad \frac{z_2}{v_0 \varphi_0 \psi_0} &= \frac{\frac{\delta}{\varphi_0}}{\left|\frac{\delta}{\varphi_0}\right|} \frac{\frac{\varepsilon}{\psi_0}}{\left|\frac{\varepsilon}{\psi_0}\right|} \frac{\kappa}{3\kappa-2} \left\{ \frac{1}{1-\kappa} \left[(2\kappa-1) - \frac{1}{6} \left(\frac{\kappa}{1-\kappa}\right)^2 \right] \frac{\delta}{\varphi_0} \frac{\varepsilon}{\psi_0} \omega^3 + \right. \\ &\quad \left. + \left[\frac{\varepsilon}{\psi_0} \left(\frac{3\kappa-2}{\kappa} + \frac{\delta}{\varphi_0}\right) - \frac{1-\kappa}{\kappa} \frac{3\kappa-2}{\kappa} \right] \omega^{\frac{1}{1-\kappa}} \right\} \end{aligned}$$

und für $K = \frac{1}{2}$

$$(23) (b) \quad \frac{y_2}{v_0 \varphi_0} = \frac{\frac{\delta}{\varphi_0}}{\left| \frac{\delta}{\varphi_0} \right|} \omega^2 \left[\frac{\delta}{\varphi_0} \left(\frac{3}{2} - \ln \omega \right) - 1 \right]$$

für $K = 2/3$

$$(c) \quad \frac{z_2}{v_0 \varphi_0 \psi_0} = \frac{\frac{\delta}{\varphi_0}}{\left| \frac{\delta}{\varphi_0} \right|} \frac{\frac{\varepsilon}{\psi_0}}{\left| \frac{\varepsilon}{\psi_0} \right|} \omega^2 \left[2 \frac{\varepsilon}{\psi_0} - 1 - \frac{\delta}{\varphi_0} \frac{\varepsilon}{\psi_0} \left(\frac{10}{3} \omega - 4 \ln \omega \right) \right]$$

Die Gleichungstriplet (19) und (22) bzw. (23) stellen das tangentegekoppelte Kurvenpaar unmittelbar vor der Kollision bis zu ihrem Eintreten allgemein, bis auf gewisse durch Tabelle 4 festgelegte Einschränkungen, dar.

§ 6

Eine Bewegungsinvariante des tangentegekoppelten Kurvenpaares.

Man kann das Problem der Tangentenkopplung mit proportionalen Bogenlängen auch auf eine Deformationsaufgabe zurückführen.

Die Funktion

$$(1) \quad p(s_1) = e^{-\frac{1}{\kappa} \int \frac{ds_1}{v}}$$

möge die "reduzierende Funktion" heißen. Mit ihrer Hilfe kann man dann die Vektorbeziehung § 1 (3) schreiben:

$$(2) \quad x_2 - x_1 = p \frac{dx_2}{dp}$$

Führt man einen Vektor $\mathcal{R}$ durch

$$(3) \quad x_1 - x_2 = p \mathcal{R}$$

ein, so läßt sich die Vektorrelation (2) in zwei Gleichungen spalten; zunächst erhält man:

$$(4) \quad \mathcal{R} = - \frac{dx_2}{dp}$$

Durch Differentiation von (3) nach p und Berücksichtigung von (4) folgt außerdem

$$(5) \quad p d\mathcal{R} = dx_1$$

Der Vektor $\mathcal{R}$ hat also immer die Richtung der Tangente der Kopplungskurve, und seine Tangente fällt mit derjenigen der Stützkurve zusammen. Die Kurve, die durch ihn beschrieben wird, soll die "reduzierte Stützkurve" heißen.

Durch Anwendung der reduzierenden Funktion p wird das Kurvenpaar demnach so deformiert, daß die Stützkurve selbst in die reduzierte Stützkurve übergeführt wird und die Kopplungskurve in einen Punkt, den Anfangspunkt des Vektors entartet.

Die Bogenelemente der Stützkurve und der reduzierten Stützkurve verhalten sich wie $p : 1$, wie man aus (5) sofort erkennt:

$$(6) \quad ds_1 = p dS$$

Durch Anwendung der Frenetschen Formeln auf die reduzierte Stützkurve unter Beachtung von (6) erhält man noch die Invariantenbeziehung:

$$\begin{cases} (a) & \rho_1 = pP \\ (b) & \tau_1 = pT \end{cases}$$

wenn P und T die Krümmungsradien der reduzierten Stützkurve darstellen. Ist die Funktion $p(s_1)$ bekannt, so stellen die Gleichungen (7) die natürlichen Gleichungen der reduzierten Stützkurve dar.

Zu jeder Stützkurve gehört eine bis auf die drei willkürlichen Integrationskonstanten des Systems §2 (13) wohldefinierte reduzierende Funktion $p(s_1)$. Die Reduktion ist also innerhalb einer 3-fach unendlichen Mannigfaltigkeit möglich.

Wird dagegen eine beliebige, hinreichend oft differenzierbare Raumkurve als reduzierte Stützkurve des Problems aufgefaßt, so ist die zugehörige reduzierende Funktion:

$$(8) \quad p = e^{-\frac{1}{\kappa} \int \frac{dS}{R}}$$

wie sich aus (3) und (6) sofort ergibt. Sie enthält keine willkürliche Integrationskonstante mehr. Die zugehörige Kopplungskurve ist daher eindeutig bestimmt.

Umgekehrt gehört aber auch zu jeder vorgegebenen, in einem gewissen Bereich definierten reduzierenden Funktion $p(s_1)$ ein - wenn auch nicht immer reelles - tangentegekoppeltes Kurvenpaar, dessen Kopplungskoordinaten und natürlichen Gleichungen angebar sind. Aus (1) folgt sofort:

$$(9) \quad \psi = - \frac{p}{\kappa \frac{dp}{ds_1}}$$

und aus §2 (13a):

$$(10) \quad \cos \varphi = \frac{p \frac{d^2 p}{ds_1^2}}{\kappa \left(\frac{dp}{ds_1} \right)^2}$$

Hieraus ermittelt man durch § 3 (2) die natürlichen Gleichungen der Kopplungskurve $\rho_2 = \rho_2\left(\frac{s_1}{\kappa}\right)$ und aus § 3 (1) und (4) $\tau_2 = \tau_2\left(\frac{s_1}{\kappa}\right)$. Daraus folgt dann aus § 4 (10) der Kopplungswinkel ψ ; und aus § 3 (1) bzw. (5) erhält man die natürlichen Gleichungen der Stützkurve $\rho_1 = \rho_1(s_1)$ bzw. $\tau_1 = \tau_1(s_1)$.

Eine reelle Tangentenkopplung innerhalb des vorgegebenen Bereiches ist nur möglich, wenn sich $-1 \leq \cos \varphi \leq +1$ ergibt, also nur für reduzierende Funktionen, die im ganzen Bereich der Ungleichung genügen:

$$(11) \quad \left| p \frac{d^2 p}{ds_1^2} \right| \leq \kappa \left(\frac{dp}{ds_1} \right)^2$$

Die reduzierende Funktion $p(s_1)$ ist demnach charakteristisch für das vorliegende Problem der Tangentenkopplung. Durch sie ist das Kurvenpaar in Form und Kopplungslage bis auf seine Lage im Koordinatensystem eindeutig gegeben. Man kann daher $p = p(s_1)$ als die natürliche Gleichung eines tangentegekoppelten Kurvenpaares auffassen.

Gehört der Kollisionspunkt zum Definitionsbereich der reduzierenden Funktion, dann nimmt sie in jedem Fall in der Nähe des Kollisionspunktes die Form an:

$$(12) \quad p = \left(1 - \frac{1-\kappa}{\kappa} \frac{S_1}{v_0}\right)^{\frac{1}{1-\kappa}}$$

Man erkennt hieraus, daß die reduzierende Funktion im Kollisionspunkt immer verschwindet.

ZWEITER TEIL

Tangentengekoppelte ähnliche Raumkurvenpaare mit proportionalen Bogenlängen.

Während bisher im wesentlichen die Frage behandelt wurde, wie man zu einer gegebenen Raumkurve eine zweite finden kann, die mit jener ein tangentengekoppeltes Raumkurvenpaar mit proportionalen Bogenlängen bildet, ist in I §6 darauf hingewiesen worden, daß ein solches Kurvenpaar bereits durch Angabe einer einzigen, hinreichend oft differenzierbaren Funktion einer einzigen unabhängigen Veränderlichen, der Bogenlänge, eindeutig bestimmt ist. Diese reduzierende Funktion enthält dann bereits die das Kurvenpaar kennzeichnenden Eigenschaften. Gibt man umgekehrt gewisse Eigenschaften des Kurvenpaares vor, die zu seiner eindeutigen Bestimmung hinreichend sind, so ist dadurch die Existenz der zugehörigen reduzierenden Funktion gesichert und damit auch die des Kurvenpaares selbst.

§ 1

Integration der Differentialgleichungen der ähnlichen Tangentenkopplung.

Im Folgenden wird als einzige, jedoch für die Bestimmung des Kurvenpaares hinreichende Eigenschaft die Ähnlichkeit der Raumkurven gefordert. Das Ziel der Untersuchung sei die Beantwortung der Fragen nach der Gestalt solcher Raumkurven, ihren Lagebeziehungen und den sich hieraus ergebenden flächen- und funktionentheoretischen Folgerungen.

Die Forderung der Ähnlichkeit der Raumkurven läßt sich durch die Gleichungen formulieren:

$$(1) \quad \begin{aligned} (a) \quad & \frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{ds_1}{ds_2} = K \\ (b) \quad & \frac{\tau_1}{\tau_2} = \frac{ds_1}{ds_2} = K \end{aligned}$$

Für $K = 1$ erhält man den interessanten Sonderfall kongruenter Raumkurven.

Für die Torsion beider Kurven kann man nach I §3 (4) und (5) anschreiben:

$$(2) \quad \begin{aligned} (a) \quad & \frac{1}{K \tau_2} = \frac{\sin \varphi}{\rho_1 \sin \varphi} \\ (b) \quad & \frac{1}{\tau_1} = \frac{\sin \varphi}{\rho_1 \operatorname{tg} \varphi} - \frac{d\varphi}{ds_1} \end{aligned}$$

Wegen (1b) besteht dann die Differentialgleichung:

$$(3) \quad \frac{d\varphi}{ds_1} = \frac{\sin \varphi}{\rho_1 \sin \varphi} (\cos \varphi - 1)$$

Da die Krümmungen hier nicht mehr als Funktionen der Bogen-

länge gegeben sind, ist es auch nicht zweckmäßig, diese als unabhängige Variable beizubehalten. Es zeigt sich vielmehr schon an dieser Stelle die Überlegenheit der reduzierenden Funktion $p(s_1)$, die man vermöge I §6 (1) und §3 (2) einführt durch:

$$(4) \quad \frac{dp}{ds_1} = -\frac{p}{\kappa^2 \rho_2 \sin \varphi}$$

(3) geht dann über in:

$$(5) \quad \frac{d\varphi}{dp} = -\frac{\kappa^2}{p} \frac{\rho_2}{\rho_1} \sin \varphi (\cos \varphi - 1)$$

Durch Berücksichtigung von (1a) erhält man hieraus:

$$(6) \quad \frac{d\varphi}{dp} = -\frac{\kappa}{p} \sin \varphi (\cos \varphi - 1)$$

Die zweite Differentialgleichung der ähnlichen Tangentenkopplung folgt aus I §3 (1) schon mit Berücksichtigung von (1a) und (4):

$$(7) \quad \cos \varphi = \frac{p}{\kappa \sin \varphi} \frac{d\varphi}{dp} - 1$$

Die Integration des simultanen Systems (6)(7) gelingt leicht durch die Substitution:

$$(8) \quad u = \frac{p}{\kappa \sin \varphi} \frac{d\varphi}{dp}$$

Zunächst geht (7) über in:

$$(9) \quad \cos \varphi = u - 1$$

und daraus folgt durch Differentiation nach p :

$$(10) \quad -\sin \varphi \frac{d\varphi}{dp} = \frac{du}{dp}$$

In Verbindung mit (6) erhält man dann:

$$(11) \quad \sin^2 \varphi = \frac{p}{\kappa (\cos \varphi - 1)} \frac{du}{dp}$$

Die Elimination von φ durch (9) führt zu:

$$(12) \quad \frac{p}{\kappa (\cos \varphi - 1)} \frac{du}{dp} = u(2-u)$$

Eliminiert man hieraus noch p durch (8), so erhält man schließlich eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung:

$$(13) \quad \frac{du}{2-u} = \frac{\cos \varphi - 1}{\sin \varphi} d\varphi$$

deren Integral sich zunächst in der Form ergibt:

$$(14) \quad u = 2 - c(1+t^2)$$

wenn $\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = t$ gesetzt wird. Nach I §2 (2) liegt t immer zwischen den Grenzen:

$$(15) \quad 0 \leq t \leq \infty$$

Werden nur reelle Raumkurven zugelassen, dann muß hinsichtlich des Wertebereiches für u wegen (9) gefordert werden:

$$(16) \quad 0 \leq u \leq 2$$

Daraus folgt aber, daß die Variable t ebenfalls nicht jeden Wert annehmen kann. Sie muß vielmehr der Ungleichung genügen:

$$(17) \quad 0 \leq t^2 \leq \frac{2-c}{c}$$

Es ist zweckmäßig, eine neue Konstante einzuführen durch:

$$(18) \quad c = \frac{2\lambda^2}{1+\lambda^2}$$

Die Ungleichung (17) geht damit über in:

$$(19) \quad 0 \leq t \leq \frac{1}{|\lambda|}$$

und das Integral (14) nimmt die Form an:

$$(20) \quad u = \frac{2}{1+\lambda^2} (1 - \lambda^2 t^2)$$

Durch (20) wird nun die Integration von (8) ermöglicht, und man erhält die reduzierende Funktion zunächst mit t als unabhängige Variable:

$$(21) \quad \frac{p}{p_0} = \left(\frac{t}{\sqrt{1-\lambda^2 t^2}} \right)^{\frac{1+\lambda^2}{2\kappa}}$$

mit p_0 als zweite Integrationskonstante. Bevor jedoch die reduzierende Funktion in Abhängigkeit von der Bogenlänge angegeben werden kann, ist es notwendig, zunächst die Formel für den Krümmungsradius zu entwickeln.

§ 2

Die natürlichen Gleichungen des ähnlichen Raumkurvenpaares.

Zur Berechnung von φ_1 bzw. φ_2 geht man am zweckmäßigsten wieder von I §3 (2) aus:

$$(a) \quad v = \kappa \varphi_2 \sin \varphi$$

(1) bzw.

$$(b) \quad v = \varphi_1 \sin \varphi$$

Setzt man diese Ausdrücke in I §2 (13a) ein, so folgt:

$$(a) \quad \frac{d(\kappa \varphi_2 \sin \varphi)}{ds_1} = \cos \varphi - \frac{1}{\kappa}$$

(2) bzw.

$$(b) \quad \frac{d(\varphi_1 \sin \varphi)}{ds_1} = \cos \varphi - \frac{1}{\kappa}$$

Die Elimination der Bogenlänge durch §1 (4) führt in beiden Fällen zu der Gleichung:

$$(3) \quad \frac{d(\varphi_{1/2} \sin \varphi)}{\varphi_{1/2} \sin \varphi} = (1 - \kappa \cos \varphi) \frac{dp}{p}$$

deren Integral mit φ_0 als Integrationskonstante lautet:

$$(4) \quad \frac{\varphi_1}{\varphi_0} = \frac{\kappa \varphi_2}{\varphi_0} = \frac{t}{2} \left(\frac{\sqrt{1+t^2}}{t} \right)^3 \left(\frac{t}{\sqrt{1-\lambda^2 t^2}} \right)^{\frac{1+\kappa+\lambda^2(1-\kappa)}{2\kappa}}.$$

φ_0 hat die Bedeutung einer Maßstabszahl.

Für die Bogenlänge erhält man nun aus §1 (4) und (8) unter Beachtung der bisherigen Ergebnisse zunächst:

$$(5) \quad ds_1 = -2 \frac{\varphi_1}{u} \frac{dt}{1+t^2}$$

Das Integral ist für beliebige λ und κ leider nicht durch elementare Funktionen darstellbar, und man muß sich an dieser Stelle mit der Form begnügen:

$$(6) \quad \frac{s_1 - s_0}{\varphi_0} = - \frac{1+\lambda^2}{2} \int \frac{\sqrt{1+t^2}}{t^4} \left(\frac{t}{\sqrt{1-\lambda^2 t^2}} \right)^{\frac{1+5\kappa+\lambda^2(1-\kappa)}{2\kappa}} dt$$

Die Integrationskonstante s_0 gibt an, von welcher Stelle ab die Bogenlänge gemessen werden soll.

Die Gleichungen (4) und (6) sind die Parameterdarstellung der ersten natürlichen Gleichung der Stütz- bzw. Kopplungskurve, während §1 (21) und §2 (6) die Parameterdarstellung der reduzierenden Funktion ist, also nach I §6 der natürlichen Gleichung des Kurvenpaares.

Zur Ermittlung der Torsion ist keine Integration mehr erforderlich; man erhält den Torsionsradius sofort aus §1 (2a) unter Berücksichtigung von §1 (9) und §2 (4) zu:

$$(7) \quad \frac{\tau_1}{\varphi_0} = \frac{\kappa \tau_2}{\varphi_0} = \frac{1+\lambda^2}{2\lambda} \frac{1}{t^2} \left(\frac{t}{\sqrt{1-\lambda^2 t^2}} \right)^{\frac{1+3\kappa+\lambda^2(1-\kappa)}{2\kappa}}$$

Mit den Gleichungen (6) und (7) ist die Parameterdarstellung der zweiten natürlichen Gleichung der Stütz- bzw. Kopplungskurve gewonnen.

Die Bedeutung der Integrationskonstanten λ , die dem Parameter κ gleichwertig an die Seite zu stellen ist, wird durch (7) bereits evident. Für $\lambda = 0$ verschwindet nämlich die Torsion; dieser Fall stellt also das ebene Problem der ähnlichen Tangentenkopplung dar. Die Hilfsfunktion $u(t)$ nimmt dann den konstanten Wert 2 an.

§ 3

Integration der Frenetschen Differentialgleichungen.

Es handelt sich nun darum, aus den natürlichen Gleichungen der Raumkurven die auf ein beliebiges Koordinatensystem bezogenen Koordinatengleichungen jener Kurven herzuleiten. Man geht von den bereits in I §2 (4) angeschriebenen Frenetschen Differentialgleichungen aus und bringt sie durch die Substitution §2

(5) zunächst auf die Form, die für jede Kurve des Kurvenpaares gültig ist: (Der Index wird daher weggelassen.)

$$\begin{aligned} (a) \quad & \frac{u}{2}(1+t^2) \frac{d^4}{dt^4} = -u \\ (1)(b) \quad & \frac{u}{2}(1+t^2) \frac{d^2 u}{dt^2} = 4 - \frac{8}{t} u \\ (c) \quad & \frac{u}{2}(1+t^2) \frac{d^2 b}{dt^2} = \frac{8}{t} u \end{aligned}$$

Es ist nicht zweckmäßig, die Bogenlänge als Parameter beizubehalten, weil sich die natürlichen Gleichungen der Kurven nicht unmittelbar als Funktionen der Bogenlänge darstellen lassen.

Das Frenetsche System (1) führt auf eine homogene lineare Differentialgleichung 3. Ordnung für $\mathcal{A}$:

$$(2) \quad \frac{d^3 \mathcal{A}}{dt^3} + f(t, \lambda) \frac{d^2 \mathcal{A}}{dt^2} + g(t, \lambda) \frac{d \mathcal{A}}{dt} + h(t, \lambda) \mathcal{A} = 0$$

mit den Koeffizienten:

$$\begin{aligned} f(t, \lambda) &= \frac{1 + 4t^2 - 3\lambda^2 t^2 (2 + 3t^2)}{t(1+t^2)(1-\lambda^2 t^2)} \\ g(t, \lambda) &= \frac{(5 + 2t^2)t^2 + \lambda^2(1+t^2 - 21t^4 - 15t^6) + 3\lambda^4(1+7t^2+5t^4)t^4}{t^2(1+t^2)^2(1-\lambda^2 t^2)^2} \\ h(t, \lambda) &= \frac{(1+\lambda^2)^2(1-2t^2+3\lambda^2 t^4)}{t(1+t^2)^3(1-\lambda^2 t^2)^3} \end{aligned}$$

Hat $\mathcal{A}$ die Komponenten:

$$x' = \frac{dx}{ds} \quad y' = \frac{dy}{ds} \quad z' = \frac{dz}{ds}$$

also ist

$$(3) \quad \mathcal{A} = ix' + jy' + pz'$$

wenn i, j, p die Einheitsbeine eines räumlichen Rechtssystems x, y, z sind, dann zerfällt die Vektordifferentialgleichung (2) in die drei homogenen linearen Differentialgleichungen 3. Ordnung:

$$(a) \quad \frac{d^3 x'}{dt^3} + f(t, \lambda) \frac{d^2 x'}{dt^2} + g(t, \lambda) \frac{dx'}{dt} + h(t, \lambda) x' = 0$$

(4)(b) und (c) entsprechende Gleichungen für y' und z' .

Um die Integration dieser Gleichung bequemer durchführen zu können, substituiert man zweckmäßig:

$$(5) \quad x' = \frac{\alpha(t, \lambda)}{\sqrt{1+t^2}}$$

und erhält selbstverständlich wieder eine homogene lineare Differentialgleichung 3. Ordnung:

$$(6) \quad \frac{d^3 \alpha}{dt^3} + F(t, \lambda) \frac{d^2 \alpha}{dt^2} + G(t, \lambda) \frac{d\alpha}{dt} + H(t, \lambda) \alpha = 0$$

mit den Koeffizienten:

$$\begin{aligned} (a) \quad F(t, \lambda) &= \frac{1}{t} \frac{1 - 6\lambda^2 t^2}{1 - \lambda^2 t^2} \\ (7)(b) \quad G(t, \lambda) &= \frac{\lambda^2}{t^2} \frac{1 - t^2 + 3\lambda^2 t^4}{(1 - \lambda^2 t^2)^2} \\ (c) \quad H(t, \lambda) &= \frac{\lambda^2}{t} \frac{1 + \lambda^2 - 4\lambda^2 t^2 + 3\lambda^4 t^4}{(1 - \lambda^2 t^2)^3} \end{aligned}$$

Zunächst bringt man die Gleichung (6) auf die Frobeniussche Normalform¹⁾, indem man mit $t^3(1 - \lambda^2 t^2)^3$ multipliziert:

$$(8) \quad t^3 F_0(t, \lambda) \frac{d^3 \alpha}{dt^3} + t^2 F_1(t, \lambda) \frac{d^2 \alpha}{dt^2} + t F_2(t, \lambda) \frac{d\alpha}{dt} + F_3(t, \lambda) \alpha = 0$$

mit

$$\begin{aligned} F_0(t, \lambda) &= 1 - 3\lambda^2 t^2 + 3\lambda^4 t^4 - \lambda^6 t^6 \\ F_1(t, \lambda) &= 1 - 8\lambda^2 t^2 + 13\lambda^4 t^4 - 6\lambda^6 t^6 \\ F_2(t, \lambda) &= \lambda^2 - \lambda^2(1 + \lambda^2)t^2 + 4\lambda^4 t^4 - 3\lambda^6 t^6 \\ F_3(t, \lambda) &= \lambda^2(1 + \lambda^2)t^2 - 4\lambda^4 t^4 + 3\lambda^6 t^6 \end{aligned}$$

Macht man den Lösungsansatz:

$$(9) \quad \alpha = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_{\nu} t^{\beta+\nu}$$

und setzt $c_0 \neq 0$ voraus, so sind die Koeffizienten c_{ν} und die Konstante β so zu bestimmen, daß die Differentialgleichung (8) durch (9) befriedigt wird.

Die Konstante β erhält man als Lösungen der Fuchsschen determinierenden Fundamentalgleichung 3. Grades:

$$(10) \quad \beta[(\beta-1)^2 + \lambda^2] = 0$$

Die Wurzeln dieser Gleichung sind:

$$\begin{aligned} (a) \quad \beta_1 &= 0 \\ (11)(b) \quad \beta_2 &= 1 + i\lambda \\ (c) \quad \beta_3 &= 1 - i\lambda \end{aligned}$$

mit $i = \sqrt{-1}$

Diesen Konstanten β_r ($r = 1; 2; 3$) entsprechen die partikulären Integrale:

$$(12) \quad \alpha_r = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_{r,\nu} t^{\beta_r+\nu}$$

Die Konstanten $c_{r,\nu}$ findet man sukzessiv durch Koeffizientenvergleich:

Zunächst für $\beta_1 = 0$

1) Die Lösungsmethode stützt sich auf die in L. Kiepert, Grundriß der Differential- und Integralrechnung II. Teil Integralrechnung 11. Aufl. Hann. 1918 pg. 896 ff. gegebene Darstellung.

$$\frac{C_{1,2\nu+1}}{C_{1,0}} = 0$$

$$\frac{C_{1,2}}{C_{1,0}} = -\frac{\lambda^2}{2} = -\binom{1/2}{1}\lambda^2$$

$$\frac{C_{1,4}}{C_{1,0}} = -\frac{\lambda^4}{8} = \binom{1/2}{2}\lambda^4$$

$$\frac{C_{1,6}}{C_{1,0}} = -\frac{\lambda^6}{16} = -\binom{1/2}{3}\lambda^6$$

$$\frac{C_{1,8}}{C_{1,0}} = -\frac{5\lambda^8}{128} = \binom{1/2}{4}\lambda^8$$

$$\frac{C_{1,10}}{C_{1,0}} = -\frac{7\lambda^{10}}{256} = -\binom{1/2}{5}\lambda^{10}$$

in inf.

Man kann hieraus das allgemeine Glied erkennen:

$$(13) \quad \frac{C_{1,2\nu}}{C_{1,0}} = (-1)^\nu \binom{1/2}{\nu} \lambda^{2\nu}$$

Damit erhält man ein partikuläres Integral vorerst in der Form:

$$(14) \quad \alpha_1 = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \binom{1/2}{\nu} (\lambda t)^{2\nu}$$

Das ist aber die Entwicklung der Funktion:

$$(15) \quad \alpha_1 = \sqrt{1 - \lambda^2 t^2}$$

Die Koeffizienten, die den Konstanten $B_{2/3} = 1 \pm i\lambda$ entsprechen, findet man auf die gleiche Weise:

$$\frac{C_{2/3,2\nu+1}}{C_{2/3,0}} = 0$$

$$\frac{C_{2/3,2}}{C_{2/3,0}} = \pm \frac{\lambda^2}{1!} \frac{i\lambda}{2} = \left(\pm \frac{i\lambda}{2}\right) \lambda^2$$

$$\frac{C_{2/3,4}}{C_{2/3,0}} = \pm \frac{\lambda^4}{2!} \frac{i\lambda}{2} \left(1 \pm \frac{i\lambda}{2}\right) = \left(\pm \frac{i\lambda}{2}\right) \lambda^4$$

$$\frac{C_{2/3,6}}{C_{2/3,0}} = \pm \frac{\lambda^6}{3!} \frac{i\lambda}{2} \left(1 \pm \frac{i\lambda}{2}\right) \left(2 \pm \frac{i\lambda}{2}\right) = \left(\pm \frac{i\lambda}{2}\right) \lambda^6$$

$$\frac{C_{2/3,8}}{C_{2/3,0}} = \pm \frac{\lambda^8}{4!} \frac{i\lambda}{2} \left(1 \pm \frac{i\lambda}{2}\right) \left(2 \pm \frac{i\lambda}{2}\right) \left(3 \pm \frac{i\lambda}{2}\right) = \left(\pm \frac{i\lambda}{2}\right) \lambda^8$$

Von diesem Ergebnis ausgehend, schließt man auf das allgemeine Glied:

$$(16) \quad \frac{C_{2/3,2\nu}}{C_{2/3,0}} = \left(\pm \frac{i\lambda}{2}\right) \lambda^{2\nu}$$

Damit ergeben sich dann zwei weitere partikuläre Integrale vorerst in der Form:

$$(17) \quad \alpha_{2/3} = t^{1 \pm i\lambda} \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\pm \frac{i\lambda}{2}\right) (\lambda t)^{2\nu}$$

Die Summe stellt aber, wie man sich leicht überzeugt, die Entwicklung der Funktion dar:

$$(18) \quad (1 - \lambda^2 t^2)^{-\frac{i\lambda}{2}} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{\nu-1+\frac{i\lambda}{2}}{\nu} (\lambda t)^{2\nu}$$

Die beiden partikulären Integrale lassen sich also in geschlossener Form anschreiben:

$$(19) \quad \alpha_{2/3} = t \left(\frac{t}{\sqrt{1 - \lambda^2 t^2}} \right)^{\pm i\lambda}$$

Wegen (5) sind dann drei nicht linear von einander abhängige partikuläre Integrale der Differentialgleichung (4), also ein Hauptsystem:

$$\begin{aligned} (a) \quad x_1' &= \sqrt{\frac{1 - \lambda^2 t^2}{1 + t^2}} \\ (20)(b) \quad x_2' &= \frac{t}{\sqrt{1 + t^2}} \left(\frac{t}{\sqrt{1 - \lambda^2 t^2}} \right)^{i\lambda} \\ (c) \quad x_3' &= \frac{t}{\sqrt{1 + t^2}} \left(\frac{t}{\sqrt{1 - \lambda^2 t^2}} \right)^{-i\lambda} \end{aligned}$$

Um das Komplexe zu vermeiden, bringt man die partikulären Integrale (20) auf die Form:

$$x_{2/3}' = \frac{t}{\sqrt{1 + t^2}} \left[\cos \ln \left(\frac{t}{\sqrt{1 - \lambda^2 t^2}} \right)^{\lambda} \pm i \sin \ln \left(\frac{t}{\sqrt{1 - \lambda^2 t^2}} \right)^{\lambda} \right]$$

und leitet durch lineare Kombination die beiden reellen partikulären Integrale her:

$$\begin{aligned} (a) \quad \bar{x}_2' &= \frac{t}{\sqrt{1 + t^2}} \cos \ln \left(\frac{t}{\sqrt{1 - \lambda^2 t^2}} \right)^{\lambda} \\ (21)(b) \quad \bar{x}_3' &= \frac{1}{\lambda} \frac{t}{\sqrt{1 + t^2}} \sin \ln \left(\frac{t}{\sqrt{1 - \lambda^2 t^2}} \right)^{\lambda} \end{aligned}$$

Für die Gleichungen (4b,c) ist dasselbe Hauptsystem gültig. Demnach kann man die allgemeinen Integrale der Differentialgleichung (4), also die Komponenten des Einheitstangentenvektors der Stütz- bzw. der Kopplungskurve anschreiben:

$$\begin{aligned} (a) \quad x' &= C_{11} x_1' + C_{12} \bar{x}_2' + C_{13} \bar{x}_3' \\ (22)(b) \quad y' &= C_{21} x_1' + C_{22} \bar{x}_2' + C_{23} \bar{x}_3' \\ (c) \quad z' &= C_{31} x_1' + C_{32} \bar{x}_2' + C_{33} \bar{x}_3' \end{aligned}$$

Es ist bemerkenswert, daß die begleitenden Dreibeine des Kurvenpaares von dem Bogenlängenverhältnis K völlig unabhängig sind.

§ 4

Orientierung des Koordinatensystems.

Nach §1 (19) ist $0 \leq t \leq \frac{1}{|\lambda|}$; es liegt nun nahe, das Koordinatensystem geeignet zu normieren und zwar so, daß für $t \rightarrow 0$ das

begleitende Dreibein zum Zusammenfallen mit dem Koordinatensystem strebt¹⁾. Wir werden sehen, daß das nicht erreichbar ist, sondern daß es uns lediglich gelingen wird, den Tangentenvektor zur x-Achse streben zu lassen, d.h. wir werden von den drei Gleichungen

$$\begin{aligned} (a) \quad \lambda(0, \lambda) &= i \\ (1)(b) \quad \mu(0, \lambda) &= j \\ (c) \quad \phi(0, \lambda) &= \phi \end{aligned}$$

zwar die Gleichung (1a) erfüllen können, aber nicht die beiden anderen.

Das Dreibein der Kurve ist nach §3 (3) und (1a,b):

$$\begin{aligned} (a) \quad \lambda &= ix' + jy' + \phi z' \\ (2)(b) \quad \mu &= -\frac{u}{2}(1+t^2)\left(i\frac{dx'}{dt} + j\frac{dy'}{dt} + \phi\frac{dz'}{dt}\right) \\ (c) \quad \phi &= \frac{\tau}{\rho t} \left\{ i\left[x't + \frac{u^2}{4}(1+t^2)^2 t \frac{d^2x'}{dt^2}\right] + \right. \\ &\quad \left. + j\left[y't + \frac{u^2}{4}(1+t^2)^2 t \frac{d^2y'}{dt^2}\right] + \phi\left[z't + \frac{u^2}{4}(1+t^2)^2 t \frac{d^2z'}{dt^2}\right] \right\} \end{aligned}$$

Die Forderungen (1) werden erfüllt, wenn folgende Gleichungen bestehen:

$$\begin{aligned} (a) \quad x'(0, \lambda) &= 1 \\ (3)(b) \quad y'(0, \lambda) &= 0 \\ (c) \quad z'(0, \lambda) &= 0 \end{aligned}$$

ferner:

$$\begin{aligned} (a) \quad \frac{dx'(0, \lambda)}{dt} &= 0 \\ (4)(b) \quad \frac{dy'(0, \lambda)}{dt} &= -(1 + \lambda^2) \\ (c) \quad \frac{dz'(0, \lambda)}{dt} &= 0 \end{aligned}$$

und schließlich:

$$\begin{aligned} (a) \quad \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\tau}{\rho t} \left[x't + \frac{u^2}{4}(1+t^2)^2 t \frac{d^2x'}{dt^2} \right] &= 0 \\ (5)(b) \quad \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\tau}{\rho t} \left[y't + \frac{u^2}{4}(1+t^2)^2 t \frac{d^2y'}{dt^2} \right] &= 0 \\ (c) \quad \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\tau}{\rho t} \left[z't + \frac{u^2}{4}(1+t^2)^2 t \frac{d^2z'}{dt^2} \right] &= 1 \end{aligned}$$

Aus §3 (20a) und (21a,b) erhält man für $t = 0$:

$$\begin{aligned} x_1'(0, \lambda) &= 1 \\ \bar{x}_2'(0, \lambda) &= 0 \quad \bar{x}_3'(0, \lambda) = 0 \end{aligned}$$

1) Definiert man die auftretenden Funktionen für $t = 0$ durch ihre Grenzwerte (falls diese existieren), so kann man (und davon ist Gebrauch gemacht) die Grenzwerte dadurch markieren, daß man unter den Funktionszeichen einfach 0 für t einsetzt.

Setzt man diese Werte und diejenigen von (3) in §3 (22) ein, so folgt:

$$(6) \quad \begin{aligned} (a) \quad C_{11} &= 1 \\ (b) \quad C_{21} &= C_{31} = 0 \end{aligned}$$

Zur Berechnung der übrigen sechs Konstanten in §3 (22) benötigt man die ersten und zweiten Ableitungen der partikulären Integrale §3 (20a) und (21a,b) an der Stelle $t = 0$.

Die Erfüllung der Formel (4c) führt wegen §3 (22) unter Berücksichtigung von (6) auf einen Ausdruck der Gestalt:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left\{ L_1 \cos \ln \left(\frac{t}{\sqrt{1-\lambda^2 t^2}} \right)^\lambda + L_2 \sin \ln \left(\frac{t}{\sqrt{1-\lambda^2 t^2}} \right)^\lambda \right\} = 0$$

wobei L_1 und L_2 linear homogen in C_{32} , C_{33} sind. Dieser Ausdruck hat aber die geforderten Eigenschaften nur, wenn $\lim_{t \rightarrow 0} L_1 = \lim_{t \rightarrow 0} L_2 = 0$ ist. Das sind zwei lineare homogene Gleichungen für C_{32} und C_{33} , deren Determinante sich als von Null verschieden erweist, d.h. es müßte $C_{32} = C_{33} = 0$ und damit $z' \equiv 0$ sein was unmöglich ist. Geometrisch bedeutet dies, daß sich bei Annäherung an $t = 0$ das begleitende Dreibein um den Tangentenvektor und damit um die x-Achse unaufhörlich dreht.

Wir wählen nun das Koordinatensystem so, daß wenigstens der Tangentenvektor der x-Achse als Grenzlage zustrebt. Dabei können wir wegen (6) über die C_{ij} ($j = 2, 3$) nach Willkür verfügen, allerdings unter Berücksichtigung der Tatsache, daß $|4| = 1$ ist. Wir dürfen z.B. setzen:

$$\begin{aligned} (a) \quad x' &= \sqrt{\frac{1-\lambda^2 t^2}{1+t^2}} \\ (7)(b) \quad y' &= -\frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \left[\cos \ln \left(\frac{t}{\sqrt{1-\lambda^2 t^2}} \right)^\lambda + \lambda \sin \ln \left(\frac{t}{\sqrt{1-\lambda^2 t^2}} \right)^\lambda \right] \\ (c) \quad z' &= -\frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \left[\lambda \cos \ln \left(\frac{t}{\sqrt{1-\lambda^2 t^2}} \right)^\lambda - \sin \ln \left(\frac{t}{\sqrt{1-\lambda^2 t^2}} \right)^\lambda \right] \end{aligned}$$

Von hier ab führen nur noch einfache Quadraturen zum Ziel. Dabei kann man immer noch offen lassen, um welche Kurve des Kurvenpaares es sich handeln soll.

Die Elimination von ds wird erreicht durch Multiplikation mit §2 (5):

$$(8) \quad \frac{2}{\rho_0} \frac{ds}{dt} = -(1+\lambda^2) \frac{\sqrt{1+t^2}}{t^4} \left(\frac{t}{\sqrt{1-\lambda^2 t^2}} \right)^{\alpha+2}$$

darin bedeutet:

$$(9) \quad \alpha = \frac{1+\kappa+\lambda^2(1-\kappa)}{2\kappa}$$

Die Formeln (7) gehen dadurch über in:

$$\begin{aligned} (a) \quad \frac{2}{\rho_0} \frac{dx}{dt} &= -(1+\lambda^2) \frac{1}{t^3} \left(\frac{t}{\sqrt{1-\lambda^2 t^2}} \right)^{\alpha+1} \\ (10)(b) \quad \frac{2}{\rho_0} \frac{dy}{dt} &= (1+\lambda^2) \frac{1}{t^3} \left(\frac{t}{\sqrt{1-\lambda^2 t^2}} \right)^{\alpha+2} \left[\cos \ln \left(\frac{t}{\sqrt{1-\lambda^2 t^2}} \right)^\lambda + \lambda \sin \ln \left(\frac{t}{\sqrt{1-\lambda^2 t^2}} \right)^\lambda \right] \\ (c) \quad \frac{2}{\rho_0} \frac{dz}{dt} &= (1+\lambda^2) \frac{1}{t^3} \left(\frac{t}{\sqrt{1-\lambda^2 t^2}} \right)^{\alpha+2} \left[\lambda \cos \ln \left(\frac{t}{\sqrt{1-\lambda^2 t^2}} \right)^\lambda - \sin \ln \left(\frac{t}{\sqrt{1-\lambda^2 t^2}} \right)^\lambda \right] \end{aligned}$$

Der Umstand, daß in (10) $\sqrt{1+t^2}$ nicht mehr vorkommt, läßt die Substitution:

$$(11) \quad \frac{t}{\sqrt{1-\lambda^2 t^2}} = e^{-\bar{\varphi}}$$

sehr zweckmäßig erscheinen. Sie hat weiterhin den Vorteil, daß der beschränkte Gültigkeitsbereich für t §1 (19) in einen unbeschränkten für $\bar{\varphi}$ übergeführt wird:

$$(12) \quad -\infty \leq \bar{\varphi} \leq +\infty$$

Durch die Substitution (11) nehmen die Gleichungen (10) die Form an:

$$(13) \begin{aligned} (a) \quad & \frac{2}{\rho_0} \frac{dx}{d\bar{\varphi}} = (1+\lambda^2) e^{-(\alpha-1)\bar{\varphi}} \\ (b) \quad & \frac{2}{\rho_0} \frac{dy}{d\bar{\varphi}} = -(1+\lambda^2) e^{-\alpha\bar{\varphi}} (\cos \lambda \bar{\varphi} - \lambda \sin \lambda \bar{\varphi}) \\ (c) \quad & \frac{2}{\rho_0} \frac{dz}{d\bar{\varphi}} = -(1+\lambda^2) e^{-\alpha\bar{\varphi}} (\lambda \cos \lambda \bar{\varphi} + \sin \lambda \bar{\varphi}) \end{aligned}$$

Hieraus folgt dann durch Integration:

$$(14) \begin{aligned} (a) \quad & \frac{2x}{\rho_0} = -\frac{1+\lambda^2}{\alpha-1} e^{-(\alpha-1)\bar{\varphi}} + C_1 \\ (b) \quad & \frac{2y}{\rho_0} = \frac{1+\lambda^2}{\alpha^2+\lambda^2} e^{-\alpha\bar{\varphi}} [(\alpha-\lambda^2)\cos \lambda \bar{\varphi} - \lambda(\alpha+1)\sin \lambda \bar{\varphi}] + C_2 \\ (c) \quad & \frac{2z}{\rho_0} = \frac{1+\lambda^2}{\alpha^2+\lambda^2} e^{-\alpha\bar{\varphi}} [\lambda(\alpha+1)\cos \lambda \bar{\varphi} + (\alpha-\lambda^2)\sin \lambda \bar{\varphi}] + C_3 \end{aligned}$$

Aus §1 (15)(17) und (18) folgt, daß λ nur reelle Werte annehmen kann; daher ist $\alpha = 1$ ausgeschlossen.

Das Koordinatensystem orientiert man nun am zweckmäßigsten so, daß an der Stelle $\bar{\varphi} = 0$ $x = 0$ und für $\bar{\varphi} \rightarrow -\infty$ $y = z = 0$ wird. Die Konstanten nehmen dann die Werte an:

$$C_1 = \frac{1+\lambda^2}{\alpha-1} \quad C_2 = C_3 = 0$$

Die Parameterdarstellung der Raumkurve erhält damit folgende Gestalt:

$$(15) \begin{aligned} (a) \quad & \frac{2x}{\rho_0} = \frac{1+\lambda^2}{\alpha-1} [1 - e^{-(\alpha-1)\bar{\varphi}}] \\ (b) \quad & \frac{2y}{\rho_0} = \frac{1+\lambda^2}{\alpha^2+\lambda^2} e^{-\alpha\bar{\varphi}} [(\alpha-\lambda^2)\cos \lambda \bar{\varphi} - \lambda(\alpha+1)\sin \lambda \bar{\varphi}] \\ (c) \quad & \frac{2z}{\rho_0} = \frac{1+\lambda^2}{\alpha^2+\lambda^2} e^{-\alpha\bar{\varphi}} [(\alpha-\lambda^2)\sin \lambda \bar{\varphi} + \lambda(\alpha+1)\cos \lambda \bar{\varphi}] \end{aligned}$$

Führt man noch den konstanten Winkel Φ ein durch:

$$(16) \quad \operatorname{tg} \Phi = \frac{\lambda(\alpha+1)}{\alpha-\lambda^2} = \lambda \frac{1+3\kappa+\lambda^2(1-\kappa)}{1+\kappa+\lambda^2(1-3\kappa)}$$

und die Konstanten:

$$(17) \quad (a) \quad \xi_0 = \frac{1}{\kappa} \frac{1+\lambda^2}{\alpha-1} = \frac{2}{1-\kappa}$$

$$(17) \quad (b) \quad r_0 = \frac{1+\lambda^2}{\kappa} \sqrt{\frac{1+\lambda^2}{\alpha^2+\lambda^2}} = \frac{2(1+\lambda^2)}{\sqrt{(1+\kappa)^2+\lambda^2(1-\kappa)^2}}$$

so erhält man die endgültige Form der Gleichungen der Raumkurve:

$$\begin{aligned} (a) \quad \frac{2x}{\rho_0} &= \kappa \xi_0 [1 - e^{-(\alpha-1)\bar{\varphi}}] \\ (18)(b) \quad \frac{2y}{\rho_0} &= \kappa r_0 e^{-\alpha\bar{\varphi}} \cos(\lambda\bar{\varphi} + \Phi) \\ (c) \quad \frac{2z}{\rho_0} &= \kappa r_0 e^{-\alpha\bar{\varphi}} \sin(\lambda\bar{\varphi} + \Phi) \end{aligned}$$

§ 5

Die Gleichungen des tangentegekoppelten ähnlichen Raumkurvenpaares.

Die Gleichungen §4 (18) können bekanntlich jede Kurve des ähnlichen Raumkurvenpaares darstellen. Hat man sich jedoch für eine entschieden, dann kommt selbstverständlich der tangentegekoppelten zugehörigen Kurve in Kopplungslage ein anderes Gleichungssystem zu. Die Aufgabe besteht nun darin, die Gleichungssysteme der beiden Kurven in Kopplungslage anzugeben.

Es ist zweckmäßig, von der Kopplungskurve auszugehen und als Maßeinheit die Hälfte der durch §2 (4) eingeführten Integrationskonstanten ρ_0 , also $\rho_{01}/2$ zu benutzen. Dabei ist es durchaus nicht notwendig, daß stets ein t existiert derart, daß nach §2 (4) $\rho_1 = \rho_{01}$ wird.

Führt man nun noch ein:

$$\frac{2x_2}{\rho_{01}} = \xi \quad \frac{2y_2}{\rho_{01}} = \eta \quad \frac{2z_2}{\rho_{01}} = \zeta$$

so läßt sich das Gleichungssystem der Kopplungskurve nach §4 (18) anschreiben:

$$\begin{aligned} (a) \quad \xi &= \xi_0 [1 - e^{-(\alpha-1)\bar{\varphi}}] \\ (1)(b) \quad \eta &= r_0 e^{-\alpha\bar{\varphi}} \cos(\lambda\bar{\varphi} + \Phi) \\ (c) \quad \zeta &= r_0 e^{-\alpha\bar{\varphi}} \sin(\lambda\bar{\varphi} + \Phi) \end{aligned}$$

Um zu dem Gleichungssystem der zugehörigen Stützkurve in Kopplungslage zu gelangen, geht man von der Vektorgleichung I §1 (3) aus, die in die drei Komponentengleichungen zerfällt:

$$\begin{aligned} (a) \quad \xi_1 &= \xi_2 + \frac{d\xi_2}{ds_2} \cdot v \\ (2)(b) \quad \eta_1 &= \eta_2 + \frac{d\eta_2}{ds_2} \cdot v \\ (c) \quad \zeta_1 &= \zeta_2 + \frac{d\zeta_2}{ds_2} \cdot v \end{aligned}$$

Zunächst erhält man aus §2 (1b) unter Beachtung von §2 (4) und der Substitution §4 (11) den Abstand:

$$(3) \quad v = r_0 e^{-(\alpha-1)\bar{\varphi}} \sqrt{1 + (1+\lambda^2)e^{-2\bar{\varphi}}}$$

und dann folgt aus §4 (8) ebenfalls unter Beachtung von §4 (11):

$$(4) \quad ds_2 = \frac{r_0}{2} \frac{1+\lambda^2}{\kappa} e^{-(\alpha-1)\bar{\varphi}} \sqrt{1 + (1+\lambda^2)e^{-2\bar{\varphi}}} d\bar{\varphi}$$

Setzt man die Ausdrücke (3), (4) und das System (1) in (2) ein, so erhält man das Gleichungssystem der zugehörigen Stützkurve in Kopplungslage in der Form:

$$\begin{aligned} (a) \quad \xi &= \xi_0 [1 - \kappa e^{-(\alpha-1)\bar{\varphi}}] \\ (5)(b) \quad \eta &= -r_0 \kappa e^{-\alpha\bar{\varphi}} \left[\frac{1-\lambda^2}{1+\lambda^2} \cos(\lambda\bar{\varphi} + \bar{\phi}) + \frac{2\lambda}{1+\lambda^2} \sin(\lambda\bar{\varphi} + \bar{\phi}) \right] \\ (c) \quad \zeta &= r_0 \kappa e^{-\alpha\bar{\varphi}} \left[\frac{2\lambda}{1+\lambda^2} \cos(\lambda\bar{\varphi} + \bar{\phi}) - \frac{1-\lambda^2}{1+\lambda^2} \sin(\lambda\bar{\varphi} + \bar{\phi}) \right] \end{aligned}$$

Es ist naheliegend, noch den konstanten Winkel ψ einzuführen durch:

$$\begin{aligned} (a) \quad \cos(\pi - \psi) &= -\frac{1-\lambda^2}{1+\lambda^2} \\ (6)(b) \quad \sin(\pi - \psi) &= \frac{2\lambda}{1+\lambda^2} \end{aligned}$$

Dann geht das System (5) in das endgültige Gleichungssystem der Stützkurve über:

$$\begin{aligned} (a) \quad \xi &= \xi_0 [1 - \kappa e^{-(\alpha-1)\bar{\varphi}}] \\ (7)(b) \quad \eta &= r_0 \kappa e^{-\alpha\bar{\varphi}} \cos(\pi + \lambda\bar{\varphi} + \bar{\phi} - \psi) \\ (c) \quad \zeta &= r_0 \kappa e^{-\alpha\bar{\varphi}} \sin(\pi + \lambda\bar{\varphi} + \bar{\phi} - \psi) \end{aligned}$$

Eine weitere geometrische Bedeutung des Parameters λ tritt hier klar zutage:

Vermöge (6) kann jedem λ des Bereiches

$$-\infty \leq \lambda \leq +\infty$$

ein Winkel ψ des Bereiches

$$-\frac{\pi}{2} < \psi \leq +\frac{\pi}{2}$$

eindeutig zugeordnet werden, um dessen Supplementwinkel die Stützkurve gegen die Kopplungskurve im positiven Sinn gedreht ist.

Um eine Vorstellung von der Gestalt jener Raumkurven zu erhalten, ist die Bemerkung nützlich, daß jede Kurve des Paares als Schnitt zweier Flächen aufgefaßt werden kann, und zwar einer Rotationsfläche und einer logarithmischen Schraubenfläche. Die Gleichungen der Rotationsfläche mit den Parametern r und χ , beispielsweise für die Kopplungskurve lauten:

$$(a) \quad \xi = \xi_0 \left[1 - \left(\frac{r}{r_0} \right)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} \right]$$

$$(8)(b) \quad \eta = r \cos \chi$$

$$(c) \quad \zeta = r \sin \chi$$

und für die zugehörige logarithmische Schraubenfläche mit den gleichen Parametern:

$$(a) \quad \xi = \xi_0 \left[1 - e^{\frac{\alpha-1}{\lambda}(\Phi-\chi)} \right]$$

$$(9)(b) \quad \eta = r \cos \chi$$

$$(c) \quad \zeta = r \sin \chi$$

Während die Rotationsfläche (8) durch Rotation der Kurve:

$$(10) \quad \xi = \xi_0 \left[1 - \left(\frac{\eta}{r_0} \right)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} \right]$$

um die ξ -Achse entsteht, denkt man sich die logarithmische Schraubenfläche durch eine Bewegung einer auf der ξ -Achse dauernd senkrecht stehenden Geraden erzeugt, deren Abstand von der $\eta\zeta$ -Ebene in Abhängigkeit von dem zurückgelegten Winkel ihrer senkrechten Projektion in dieser Ebene durch (9a) gegeben ist.

Da eine Kurve eines tangentegekoppelten ähnlichen Raumkurvenpaares ganz einer solchen logarithmischen Schraubenfläche angehört und überdies ihre senkrechte Projektion in einer zur Achse senkrechten Ebene eine logarithmische Spirale mit den Polarkoordinaten r und χ

$$(11) \quad r = r_0 e^{\frac{\alpha}{\lambda}(\Phi-\chi)}$$

ergibt, ist die Bezeichnung "logarithmische Raumspirale" sicher berechtigt.

Man kann also abschließend den Satz aussprechen:

Die durch ähnliche Tangentenkopplung erzeugten Raumkurven sind stets logarithmische Raumspiralen; ist ein Kollisionspunkt vorhanden, so ist er asymptotischer Punkt.

Es möge noch vermerkt werden, daß diese so erzeugten logarithmischen Raumspiralen nicht - wie man vielleicht vermuten könnte - zu jener Schar der Asymptotenlinien der Rotationsfläche (8) bzw. der logarithmischen Schraubenfläche (9) gehören, die ebenfalls logarithmische Raumspiralen sind.

§ 6

Tangentengekoppelte ähnliche Raumkurvenpaare in ähnlicher Lage.

Ein Kurvenpaar $\mathcal{K}_1 = \mathcal{K}_1[s_1(\bar{\varphi})]$ und $\mathcal{K}_2 = \mathcal{K}_2[s_2(\bar{\varphi})]$ kann ganz allgemein in Lage und Form durch die Regelfläche charakterisiert

werden, deren Erzeugenden die Verbindungsgeraden korrespondierender Punkte der Kurven sind. Die Gleichung dieser Regelfläche schreibt man zweckmäßig in der Form:

$$(1) \quad \mathcal{K}(\bar{\varphi}, \mathcal{V}) = (1 + \mathcal{V})\mathcal{K}_2[s_2(\bar{\varphi})] - \mathcal{V}\mathcal{K}_1[s_1(\bar{\varphi})]$$

Die beiden Kurven selbst erhält man, wenn man dem Parameter $\mathcal{V}$ die Werte 0 bzw. -1 erteilt.

Die Betrachtung gewinnt wesentlich an Allgemeinheit, wenn man beliebige Lagen beider Kurven zueinander zuläßt und unter diesen alle ausgezeichneten Lagen herausucht. Es genügt zu diesem Zweck, nur eine Kurve des Paares einer linearen Koordinatentransformation zu unterwerfen, während die Lage der anderen Kurve im Koordinatensystem ungeändert bleibt.

Sind π_1, π_2, π_3 die Einheitsbeine eines Rechtssystems, dessen Ursprung mit demjenigen des Systems i, j, k zusammenfällt, und ist u ein konstanter Vektor, so stellt der Vektor:

$$(2) \quad \mathcal{K}_3[s_1(\bar{\varphi})] = i(\pi_1, \mathcal{K}_1 + u) + j(\pi_2, \mathcal{K}_1 + u) + k(\pi_3, \mathcal{K}_1 + u)$$

eine 6-parametrische Kurvenschar dar, deren Kurven dieselben natürlichen Gleichungen zukommen. Führt man den Vektor $\mathcal{K}_3$ an Stelle von $\mathcal{K}_1$ in (1) ein, so sind durch (1) alle Regelflächen gegeben, die sich aus dem Kurvenpaar in beliebiger Lage auf die angegebene Weise erzeugen lassen.

Jede solche Regelfläche ist "Träger" eines Kurvenpaares; korrespondierende Einzelkurven der Kurvenpaare aller Träger haben die gleiche geometrische Form. Die Kurvenpaare aller Träger unterscheiden sich demnach nur in der Lage der Einzelkurven zueinander.

Da zwei beliebige, von einander verschiedene Träger durch zwei verschiedene Gleichungen mit denselben unabhängigen Variablen $\bar{\varphi}$ und $\mathcal{V}$ dargestellt werden, kann man den einen Träger als Bild des anderen auffassen. Es hat die vorteilhafte Eigenschaft, daß Krümmung und Windung der Einzelkurven des in Rede stehenden Kurvenpaares gegenüber dieser Abbildung invariant sind. Diese Eigenschaft trifft - außer für die Parameterlinien $\bar{\varphi} = \text{const.}$ - aber auch nur für das Kurvenpaar zu. Es nimmt daher bei dieser Abbildung gegenüber allen anderen Kurven der Fläche eine Sonderstellung ein.

Ist nun die eine Kurve des Paares durch eine oder mehrere beliebige, sich nicht widersprechende Erzeugungsvorschriften aus der anderen Kurve herleitbar, so existiert sicher mindestens ein ausgezeichneter Träger, nämlich derjenige, der zur Erzeugungslage gehört. Um nun die Kurven, die die Lösung eines räumlichen Problems darstellen, bequem untereinander vergleichen zu können, kann man ein Übereinkommen dahingehend treffen, ihre ebenen Bilder zum Vergleich heranzuziehen, die durch eine konforme Abbildung des ausgezeichneten Trägers auf die Ebene entstehen. Sind mehrere ausgezeichnete Träger vorhanden, so wird man denjenigen einer konformen Abbildung unterwerfen, der für das jeweilige Problem am meisten charakteristisch ist.

Im Falle tangengekoppelter ähnlicher Raumkurvenpaare existieren naturgemäß zwei ausgezeichnete Träger, einer, der der Kopplungslage entspricht, und einer, der die Kurven in ähnlicher Lage trägt. Ihrem Wesen nach sollen sie als Kopplungsträger bzw. Projektionsträger bezeichnet werden.

Identifiziert man die Kopplungskurve mit $\mathcal{K}_2[s_2(\bar{\varphi})]$ in (1), so kann man ihr Gleichungssystem §5 (1) beibehalten. Die Gleichungen der Stützkurve jedoch mögen in der etwas abgeänderten Form §5 (5) vorgegeben werden:

$$\begin{aligned} (a) \quad \xi &= \xi_0 [1 - \kappa e^{-(\alpha-1)\bar{\varphi}}] \\ (3)(b) \quad \eta &= r_0 \kappa e^{-\alpha\bar{\varphi}} \left[\frac{1-\mu^2}{1+\mu^2} \cos(\lambda\bar{\varphi}+\Phi) - \frac{2\mu}{1+\mu^2} \sin(\lambda\bar{\varphi}+\Phi) \right] \\ (c) \quad \zeta &= r_0 \kappa e^{-\alpha\bar{\varphi}} \left[\frac{2\mu}{1+\mu^2} \cos(\lambda\bar{\varphi}+\Phi) + \frac{1-\mu^2}{1+\mu^2} \sin(\lambda\bar{\varphi}+\Phi) \right] \end{aligned}$$

Dieses Gleichungssystem entspricht der Darstellung (2), jedoch mit dem einzigen Lageparameter μ . Die Stützkurve ist mit der Kopplungskurve in Kopplungslage für $\mu = \frac{1}{\lambda}$; eine Änderung des Parameters μ bewirkt eine Drehung der Stützkurve um die ξ -Achse.

Der geradlinige Träger beider Kurven läßt sich dann nach (1) darstellen durch:

$$\begin{aligned} (a) \quad \xi(\bar{\varphi}, \vartheta) &= \xi_0 \left\{ 1 - [1 + \vartheta(1-\kappa)] e^{-(\alpha-1)\bar{\varphi}} \right\} \\ (4)(b) \quad \eta(\bar{\varphi}, \vartheta) &= r_0 e^{-\alpha\bar{\varphi}} \left\{ \left[1 + \vartheta(1-\kappa) \frac{1-\mu^2}{1+\mu^2} \right] \cos(\lambda\bar{\varphi}+\Phi) + \vartheta \frac{2\mu\kappa}{1+\mu^2} \sin(\lambda\bar{\varphi}+\Phi) \right\} \\ (c) \quad \zeta(\bar{\varphi}, \vartheta) &= r_0 e^{-\alpha\bar{\varphi}} \left\{ -\vartheta \frac{2\mu\kappa}{1+\mu^2} \cos(\lambda\bar{\varphi}+\Phi) + \left[1 + \vartheta(1-\kappa) \frac{1-\mu^2}{1+\mu^2} \right] \sin(\lambda\bar{\varphi}+\Phi) \right\} \end{aligned}$$

Den Kopplungsträger erhält man, wenn μ den Wert $\mu = \frac{1}{\lambda}$ annimmt.

Um den Projektionsträger zu erhalten, geht man von der Überlegung aus, daß seine Erzeugenden sich in diesem Fall im Ähnlichkeitszentrum schneiden. Die ein-parametrische Geradenschar

$$\begin{aligned} \xi &= f_1(\bar{\varphi}) + \vartheta g_1(\bar{\varphi}) \\ (5) \quad \eta &= f_2(\bar{\varphi}) + \vartheta g_2(\bar{\varphi}) \\ \zeta &= f_3(\bar{\varphi}) + \vartheta g_3(\bar{\varphi}) \end{aligned}$$

stellt aber ein räumliches Büschel dar, wenn die Bedingungen

$$(6) \quad \vartheta = \vartheta_0 = - \frac{\frac{df_1}{d\bar{\varphi}}}{\frac{dg_1}{d\bar{\varphi}}} = - \frac{\frac{df_2}{d\bar{\varphi}}}{\frac{dg_2}{d\bar{\varphi}}} = - \frac{\frac{df_3}{d\bar{\varphi}}}{\frac{dg_3}{d\bar{\varphi}}}$$

erfüllt sind. Die erste Bedingung erlaubt die Ermittlung von ϑ_0 , das dem Ähnlichkeitszentrum entspricht:

$$(7) \quad \vartheta_0 = -\frac{1}{1-\kappa}$$

Die anderen Bedingungen führen zu dem Gleichungssystem:

$$(8) \quad \begin{aligned} \alpha \frac{1-\mu^2}{1+\mu^2} + \lambda \frac{2\mu}{1+\mu^2} &= \alpha \\ \lambda \frac{1-\mu^2}{1+\mu^2} - \alpha \frac{2\mu}{1+\mu^2} &= \lambda \end{aligned}$$

woraus sich sofort $\mu = 0$ ergibt.

Das Ähnlichkeitszentrum ist demnach der Kollisionspunkt, und der Projektionsträger hat das Gleichungssystem:

$$(9) \quad \begin{aligned} (a) \quad \xi &= \xi_0 \left\{ 1 - [1 + \vartheta(1-\kappa)] e^{-(\alpha-1)\bar{\varphi}} \right\} \\ (b) \quad \eta &= r_0 [1 + \vartheta(1-\kappa)] e^{-\alpha\bar{\varphi}} \cos(\lambda\bar{\varphi} + \bar{\Phi}) \\ (c) \quad \zeta &= r_0 [1 + \vartheta(1-\kappa)] e^{-\alpha\bar{\varphi}} \sin(\lambda\bar{\varphi} + \bar{\Phi}) \end{aligned}$$

Die Parameterwerte $\vartheta = 0$ und $\vartheta = -1$ liefern das Kurvenpaar in ähnlicher Lage.

§ 7

Konforme Abbildung des Projektionsträgers auf die Ebene.

Bekanntlich ist die Aufgabe, eine Fläche konform auf eine Ebene abzubilden, mit dem Problem identisch, ein System isometrischer Koordinaten auf der Fläche aufzufinden.¹⁾

Sind $E(\bar{\varphi}, \vartheta)$, $F(\bar{\varphi}, \vartheta)$, $G(\bar{\varphi}, \vartheta)$ die Fundamentalgrößen erster Ordnung der Fläche, deren Gleichung $\pi = \pi(\bar{\varphi}, \vartheta)$ lautet, und versteht man unter $\bar{E}(X, Y)$, $\bar{F}(X, Y)$, $\bar{G}(X, Y)$ die Fundamentalgrößen erster Ordnung derselben Fläche, wenn sie durch die Gleichung $\bar{\pi} = \bar{\pi}(X, Y)$ gegeben ist und X, Y isometrische Koordinaten sind, dann gilt die Gleichung:

$$(1) \quad E d\vartheta^2 + 2F d\vartheta d\bar{\varphi} + G d\bar{\varphi}^2 = \bar{E} (dX^2 + dY^2)$$

deren jede Seite das Bogenelement der Fläche darstellt. Für die Ermittlung der isometrischen Koordinatenlinien $X = \text{const.}$ $Y = \text{const.}$ ist es zunächst notwendig, die gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung und zweiten Grades zu integrieren:

$$(2) \quad E d\vartheta^2 + 2F d\vartheta d\bar{\varphi} + G d\bar{\varphi}^2 = 0$$

die sich in die beiden linearen Differentialgleichungen spalten läßt:

1) J. Knoblauch, Allgemeine Theorie der krummen Flächen, Leipzig 1888 pg. 127 ff.

$$(3) \quad \sqrt{E} d\vartheta + \frac{1}{\sqrt{E}} (F \pm i \sqrt{EG - F^2}) d\bar{\varphi} = 0$$

Da die Bogenlänge längs reeller Kurven niemals verschwindet, ist man gezwungen, die Existenz komplexer Kurven vorauszusetzen.

Es existiert immer ein integrierender Faktor $m(\bar{\varphi}, \vartheta) \pm i \cdot n(\bar{\varphi}, \vartheta)$ mit dessen Hilfe man die linke Seite von (3) zu einem vollständigen Differential $dX \pm i dY$ machen kann. die Linien $X(\bar{\varphi}, \vartheta) = \text{const.}$ $Y(\bar{\varphi}, \vartheta) = \text{const.}$ sind dann die gesuchten isometrischen Koordinatenlinien.

Die Fundamentalgrößen erster Ordnung

$$\begin{aligned} E &= \left(\frac{\partial \xi}{\partial \vartheta} \right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial \vartheta} \right)^2 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial \vartheta} \right)^2 \\ F &= \frac{\partial \xi}{\partial \vartheta} \frac{\partial \xi}{\partial \bar{\varphi}} + \frac{\partial \eta}{\partial \vartheta} \frac{\partial \eta}{\partial \bar{\varphi}} + \frac{\partial \zeta}{\partial \vartheta} \frac{\partial \zeta}{\partial \bar{\varphi}} \\ G &= \left(\frac{\partial \xi}{\partial \bar{\varphi}} \right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial \bar{\varphi}} \right)^2 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial \bar{\varphi}} \right)^2 \end{aligned}$$

nehmen für den Projektionsträger mit §6 (9) die Form an:

$$\begin{aligned} (a) \quad E &= 4 \left[1 + \left(\frac{r_0}{2} \right)^2 (1 - \kappa)^2 e^{-2\bar{\varphi}} \right] e^{-2(\alpha-1)\bar{\varphi}} \\ (4)(b) \quad F &= -2 \frac{1+\lambda^2}{\kappa} [1 + \vartheta(1-\kappa)] \left[1 + \left(\frac{r_0}{2} \right)^2 \frac{\alpha}{\alpha-1} (1-\kappa)^2 e^{-2\bar{\varphi}} \right] e^{-2(\alpha-1)\bar{\varphi}} \\ (c) \quad G &= \left(\frac{1+\lambda^2}{\kappa} \right)^2 [1 + \vartheta(1-\kappa)]^2 [1 + (1+\lambda^2) e^{-2\bar{\varphi}}] e^{-2(\alpha-1)\bar{\varphi}} \end{aligned}$$

und daraus:

$$(5) \quad EG - F^2 = 4r_0^2(1+\lambda^2) [1 + \vartheta(1-\kappa)]^2 \left[1 + \left(\frac{r_0}{2} \right)^2 \frac{\lambda^2}{1+\lambda^2} (1-\kappa)^2 e^{-2\bar{\varphi}} \right] e^{-2(2\alpha-1)\bar{\varphi}}$$

Führt man noch im Interesse der Übersichtlichkeit der Rechnung folgende Abkürzungen ein:

$$\begin{aligned} (a) \quad A &= \left(\frac{r_0}{2} \right)^2 (1-\kappa)^2 \\ (6)(b) \quad B &= \left(\frac{r_0}{2} \right)^2 (1-\kappa)^2 \frac{\alpha}{\alpha-1} \\ (c) \quad C &= \left(\frac{r_0}{2} \right)^2 (1-\kappa)^2 \frac{\lambda^2}{1+\lambda^2} \end{aligned}$$

so nimmt (3) die Form an:

$$(7) \quad 2e^{-(\alpha-1)\bar{\varphi}} \sqrt{1+Ae^{-2\bar{\varphi}}} d\vartheta - [1 + \vartheta(1-\kappa)] e^{-(\alpha-1)\bar{\varphi}} \left\{ \frac{1+\lambda^2}{\kappa} \frac{1+Be^{-2\bar{\varphi}}}{\sqrt{1+Ae^{-2\bar{\varphi}}}} \pm \right. \\ \left. \pm i r_0 \sqrt{1+\lambda^2} e^{-\bar{\varphi}} \sqrt{\frac{1+Ce^{-2\bar{\varphi}}}{1+Ae^{-2\bar{\varphi}}}} \right\} d\bar{\varphi} = 0$$

Den integrierenden Faktor erkennt man sofort als:

$$(8)(a) \quad m(\bar{\varphi}, \vartheta) = \frac{1}{1 + \vartheta(1-\kappa)} \cdot \frac{e^{(\alpha-1)\bar{\varphi}}}{\sqrt{1+Ae^{-2\bar{\varphi}}}}$$

$$(8)(b) \quad n(\bar{\varphi}, \vartheta) = 0$$

Nach Multiplikation mit (8a) läßt sich dann (7) nach Erledigung einiger leicht ausführbarer Quadraturen als vollständiges Differential anschreiben:

$$(9) \quad d\xi_0 \ln \left\{ [1 + \vartheta(1-\kappa)] e^{-(\alpha-1)\bar{\varphi}} \sqrt{1 + A e^{-2\bar{\varphi}}} \right\} \pm \\ \pm i d\xi_0 \left\{ \lambda \ln (\sqrt{1 + C e^{-2\bar{\varphi}}} - \sqrt{C e^{-2\bar{\varphi}}}) - \arctg \frac{1}{\lambda} \sqrt{\frac{C e^{-2\bar{\varphi}}}{1 + C e^{-2\bar{\varphi}}}} \right\} = 0$$

Die Gleichungen eines isometrischen Koordinatennetzes sind daher:

$$(a) \quad X = \xi_0 \ln \left\{ [1 + \vartheta(1-\kappa)] e^{-(\alpha-1)\bar{\varphi}} \sqrt{1 + A e^{-2\bar{\varphi}}} \right\} \\ (10) \quad (b) \quad Y = \xi_0 \left\{ \lambda \ln (\sqrt{1 + C e^{-2\bar{\varphi}}} - \sqrt{C e^{-2\bar{\varphi}}}) - \arctg \frac{1}{\lambda} \sqrt{\frac{C e^{-2\bar{\varphi}}}{1 + C e^{-2\bar{\varphi}}}} \right\}$$

Nun sind aber auf einer Fläche beliebig viele isometrischen Netze denkbar, und es gilt der Satz:

Ist auf einer Fläche ein isometrisches Netz $X = \text{const.}$ $Y = \text{const.}$ bekannt, dann sind alle übrigen isometrischen Systeme $\bar{X} = \text{const.}$ $\bar{Y} = \text{const.}$ durch die reguläre, aber sonst beliebige Funktion der komplexen Veränderlichen $X \pm iY$

$$(11) \quad \bar{X} \pm i\bar{Y} = H(X \pm iY)$$

herleitbar.

Von Interesse ist noch jenes isometrische System, das die Abwicklung der Fläche auf die Ebene leistet, also jenes System, in dem die Bogenlänge gegenüber dem ursprünglichen Parametersystem $\vartheta = \text{const.}$ $\bar{\varphi} = \text{const.}$ ungeändert bleibt. Ist dieses System $\sigma = \text{const.}$ $\bar{\omega} = \text{const.}$, dann möge nach (11) zunächst der Ansatz gemacht werden:

$$(12) \quad \sigma(\cos \bar{\omega} + i \sin \bar{\omega}) = H(X + iY)$$

Spaltet man in Real- und Imaginärteil, so ist allgemein:

$$(a) \quad \sigma \cos \bar{\omega} = f(X, Y) \\ (13) \quad (b) \quad \sigma \sin \bar{\omega} = g(X, Y)$$

Wegen des regulären Charakters der Funktion $H(X \pm iY)$ müssen die reellen Funktionen $f(X, Y)$ und $g(X, Y)$ den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen genügen:

$$(a) \quad \frac{\partial f}{\partial X} = \frac{\partial g}{\partial Y} \\ (14) \quad (b) \quad \frac{\partial f}{\partial Y} = - \frac{\partial g}{\partial X}$$

Die Forderung gleicher Bogenlänge in den Systemen $\sigma = \text{const.}$, $\bar{\omega} = \text{const.}$ und $\bar{\varphi} = \text{const.}$ führt dann unter Berücksichtigung von (14) zu der partiellen Differentialgleichung:

$$(15) \quad \left(\frac{\partial f}{\partial X}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial Y}\right)^2 = \frac{E}{\left(\frac{\partial X}{\partial \bar{\varphi}}\right)^2}$$

Die rechte Seite ausgeführt, erhält man mit Beachtung von (10a):

$$(16) \quad \left(\frac{\partial f}{\partial X}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial Y}\right)^2 = e^{2\frac{X}{\xi_0}}$$

Diese Gleichung wird beispielsweise befriedigt durch die Funktion:

$$(17) \quad f(X, Y) = \xi_0 e^{\frac{X}{\xi_0}} \cos \frac{Y}{\xi_0}$$

und aus (14a) folgt sofort:

$$(18) \quad g(X, Y) = \xi_0 e^{\frac{X}{\xi_0}} \sin \frac{Y}{\xi_0}$$

Führt man noch folgende Bezeichnungen ein:

$$(19) \quad \begin{aligned} (a) \quad Z &= \sigma (\cos \bar{\omega} + i \sin \bar{\omega}) \\ (b) \quad W &= X + iY \end{aligned}$$

so wird die konforme Abbildung des Projektionsträgers auf die Ebene nach (12), (13), (17) und (18) vermittelt durch die analytische Funktion:

$$(20) \quad \boxed{W = \ln \left(\frac{Z}{\xi_0} \right)^{\xi_0}}$$

Dieses Ergebnis läßt eine anschauliche Deutung zu:

Das isometrische System $\sigma = \text{const.}$, $\bar{\omega} = \text{const.}$ auf dem Projektionsträger wird dadurch erhalten, daß man auf den Erzeugenden der Fläche die Strecken $\sigma = \text{const.}$ vom Ähnlichkeitszentrum aus abträgt. Die Abwicklung der Fläche ergibt eine unendlich-vielblättrige Riemannsche Fläche mit einem logarithmischen Verzweigungspunkt, der dem Ähnlichkeitszentrum, also dem Kollisionspunkt entspricht; die Koordinatenlinien $\bar{\omega} = \text{const.}$ gehen in die vom Verzweigungspunkt ausgehenden Strahlen und $\sigma = \text{const.}$ in die konzentrischen Kreise um den Verzweigungspunkt über. Die analytische Funktion (20) vermittelt dann die umkehrbar eindeutige konforme Abbildung dieser Riemannschen Fläche auf die einfache W-Ebene.

Das ähnliche Raumkurvenpaar in ähnlicher Lage hat in der W-Ebene die Bilder:

$$(21) \quad \begin{aligned} (a) \quad X &= -\frac{1+\lambda^2}{\kappa} \bar{\varphi} + \frac{1}{1-\kappa} \ln(1+Ae^{-2\bar{\varphi}}) \\ (b) \quad Y &= \frac{2}{1-\kappa} \left[\lambda \ln \left(\sqrt{1+A \frac{\lambda^2}{1+\lambda^2}} e^{-2\bar{\varphi}} \right) - \frac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}} e^{-\bar{\varphi}} \sqrt{A} - \right. \\ &\quad \left. - \arctg \frac{e^{-\bar{\varphi}}}{\sqrt{1+\lambda^2}} \sqrt{\frac{A}{1+A \frac{\lambda^2}{1+\lambda^2}} e^{-2\bar{\varphi}}} \right] \end{aligned}$$

und

$$(22) \quad (a) \quad X = \frac{2}{1-\kappa} \ln \kappa - \frac{1+\lambda^2}{\kappa} \bar{\varphi} + \frac{1}{1-\kappa} \ln(1+Ae^{-2\bar{\varphi}})$$

$$(b) \text{ wie (21b)}$$

Man erkennt, daß beide Kurven kongruent sind; sie ^{sind} lediglich in Abszissenrichtung um $(2/(1-\kappa)) \ln \kappa$ gegeneinander verschoben. Hinsichtlich des Verlaufes einer Kurve des Paares in der Bildebene bemerkt man, daß sie sich stets und ganz in der unteren Halbebene befindet; die X-Achse ist in jedem Fall Asymptote der Kurve.

Für $\lambda = 0$ ist Y beschränkt außer für $\kappa = 1$:

$$-\frac{\pi}{2} |\xi_0| \leq Y \leq 0$$

In jedem anderen Fall nimmt Y von Null bis-Unendlich ab. Aus dem Steigungsmaß

$$(23) \quad \frac{dY}{dX} = -r_0 \frac{\kappa}{\sqrt{1+\lambda^2}} e^{-\bar{\varphi}} \frac{\sqrt{1+A \frac{\lambda^2}{1+\lambda^2} e^{-2\bar{\varphi}}}}{1+A \frac{\alpha}{\alpha-1} e^{-2\bar{\varphi}}}$$

erkennt man, daß die Kurve für $\kappa \leq 1$ und jedes λ und für $\kappa > 1$ und

$$\lambda^2 \geq \frac{\kappa+1}{\kappa-1} = \lambda_0^2$$

monoton fällt. Ist dagegen $\lambda^2 < \lambda_0^2$ für $\kappa > 1$, so ist X nach oben beschränkt, und die Kurve hat in diesem Fall in dem Intervall

$$(24) \quad -\infty \leq X \leq -\frac{1}{\kappa-1} \ln \frac{1}{\alpha} \left(\frac{A\alpha}{1-\alpha} \right)^{1-\alpha} = X_0$$

zwei Zweige, d.h. die rechte Grenze des Intervalls ist ein Maximum der Umkehrfunktion $X = X(Y)$; der hierzu gehörende Parameter ist:

$$(25) \quad \bar{\varphi} = \varphi_0 = \ln \sqrt{\frac{A\alpha}{1-\alpha}}$$

und der Funktionswert an dieser Stelle:

$$(26) \quad Y = Y_0 = \frac{2}{1-\kappa} \left(\lambda \ln \frac{\lambda_0 - \lambda}{\sqrt{\lambda_0^2 - \lambda^2}} - \operatorname{arctg} \frac{1}{\lambda_0} \right)$$

Außer der X-Achse existiert im allgemeinen noch eine Asymptote, die für $0 < \kappa < 1$ die Richtung $-\lambda/a$ und für $\kappa > 1$ die Richtung λ/a hat.

Aus der Bedingung für das Vorhandensein eines Wendepunktes erhält man

$$(27) \quad e^{2\bar{\varphi}} = (1+\lambda^2)(1-\kappa) \frac{1+\kappa-\lambda^2(1-\kappa)}{(1+\kappa)^2 + \lambda^2(1-\kappa)^2}$$

Man erkennt hieraus, daß ein Wendepunkt nur für $0 < \kappa < 1$ existiert und zwar nur dann, wenn außerdem

$$(28) \quad \lambda^2 < \frac{1+\kappa}{1-\kappa}$$

ist. In jedem anderen Fall ist kein Wendepunkt vorhanden. Man erhält eine anschauliche Vorstellung vom Verlauf dieser Bildkurven durch die Tabelle 5.

κ	λ	$\bar{\varphi}$	X	Y	Asymptoten- richtung	Wendepunkt.
$0 < \kappa < 1$	$\lambda = 0$	$\infty \geq \bar{\varphi} \geq -\infty$	$-\infty \leq X \leq \infty$	$0 \geq Y \geq -\frac{\pi}{1-\kappa}$	$0 ; 0$	vorhanden
	$\lambda \neq 0$	$\infty \geq \bar{\varphi} \geq -\infty$	$-\infty \leq X \leq \infty$	$0 \geq Y \geq -\infty$	$0 ; -\frac{\lambda}{\alpha}$	vorhanden, wenn $\lambda^2 < \frac{1+\kappa}{1-\kappa}$
$\kappa = 1$	beliebig	$\infty \geq \bar{\varphi} \geq -\infty$	$-\infty \leq X \leq \infty$	$0 \geq Y \geq -\infty$	$0 ; -\infty$	nicht vorh.
$\kappa > 1$	$\lambda = 0$	$\infty \geq \bar{\varphi} \geq \ln \frac{1}{\lambda_0}$	$-\infty \leq X \leq X_0$	$0 \geq Y \geq Y_0$	0	nicht vorh.
	$\lambda = 0$	$\ln \frac{1}{\lambda_0} > \bar{\varphi} \geq -\infty$	$X_0 > X \geq -\infty$	$Y_0 > Y \geq \frac{\pi}{1-\kappa}$	0	nicht vorh.
$\kappa > 1$	$0 < \lambda^2 < \lambda_0^2$	$\infty \geq \bar{\varphi} \geq \bar{\varphi}_0$	$-\infty \leq X \leq X_0$	$0 \geq Y \geq Y_0$	0	nicht vorh.
	$\gamma < \lambda^2 < \lambda_0^2$	$\bar{\varphi}_0 > \bar{\varphi} \geq -\infty$	$X_0 > X \geq -\infty$	$Y_0 > Y \geq -\infty$	$\frac{\lambda}{\alpha}$	nicht vorh.
$\kappa > 1$	$\lambda = \lambda_0$	$\infty \geq \bar{\varphi} \geq -\infty$	$-\infty \leq X \leq \infty$	$0 \geq Y \geq -\infty$	$0 ; \pm \infty$	nicht vorh.
$\kappa > 1$	$\lambda_0 < \lambda \leq \infty$	$\infty \geq \bar{\varphi} \geq -\infty$	$-\infty \leq X \leq \infty$	$0 \geq Y \geq -\infty$	$0 ; \frac{\lambda}{\alpha}$	nicht vorh.

Tabelle 5

§ 8

Tangentengekoppelte kongruente Raumkurvenpaare.

Ein interessanter Grenzfall liegt für $K = 1$ vor. Da die Kurven des Paares in Flexion und Torsion in diesem Fall übereinstimmen, handelt es sich um kongruente Raumkurven. Man kann die Formeln, aus denen die Eigenschaften tangentengekoppelter kongruenter Raumkurvenpaare herleitbar sind, aus den bisherigen Ergebnissen durch Grenzübergang erhalten.

Nach II §5 (1) und (7) erhält man die Gleichungen dieses Kurvenpaares in Kopplungslage mit

$$r_0 = 1 + \lambda^2$$

$$\alpha = 1$$

$$\operatorname{tg} \Phi = \operatorname{tg} \Psi = \frac{2\lambda}{1-\lambda^2} = \operatorname{tg} \Phi_0.$$

Kopplungskurve:

$$(a) \quad \xi = (1 + \lambda^2) \bar{\varphi}$$

$$(1)(b) \quad \eta = (1 + \lambda^2) e^{-\bar{\varphi}} \cos(\lambda \bar{\varphi} + \Phi_0)$$

$$(c) \quad \zeta = (1 + \lambda^2) e^{-\bar{\varphi}} \sin(\lambda \bar{\varphi} + \Phi_0)$$

Stützkurve:

$$(a) \quad \xi = (1 + \lambda^2) \bar{\varphi} + 2$$

$$(2)(b) \quad \eta = -(1 + \lambda^2) e^{-\bar{\varphi}} \cos \lambda \bar{\varphi}$$

$$(c) \quad \zeta = -(1 + \lambda^2) e^{-\bar{\varphi}} \sin \lambda \bar{\varphi}$$

Diese Kurven liegen auf zwei Rotationsflächen, die durch Rotation der Kurven:

$$(a) \quad \eta = (1 + \lambda^2) e^{-\frac{\xi}{1+\lambda^2}}$$

$$(3) \quad (b) \quad \eta = (1 + \lambda^2) e^{-\frac{\xi-2}{1+\lambda^2}}$$

um die ξ -Achse entstehen. Die durch §5 (9) eingeführten logarithmischen Schraubenflächen gehen in die gemeinen Schraubenflächen über:

$$\begin{aligned}
 (a) \quad \xi &= \frac{1+\lambda^2}{\lambda} (\chi - \Phi_0) \\
 &\text{bezw.} \\
 (b) \quad \xi &= \frac{1+\lambda^2}{\lambda} (\chi - \pi) + 2 \\
 (4) \quad (c) \quad \eta &= r \cos \chi \\
 (d) \quad \zeta &= r \sin \chi
 \end{aligned}$$

Die Projektion auf eine zur ξ -Achse senkrechte Ebene ist wieder eine logarithmische Spirale:

$$\begin{aligned}
 (a) \quad r &= (1+\lambda^2) e^{\frac{1}{\lambda}(\Phi_0 - \chi)} \\
 (5) \quad &\text{bezw.} \\
 (b) \quad r &= (1+\lambda^2) e^{\frac{1}{\lambda}(\pi - \chi)}
 \end{aligned}$$

Bringt man beide Kurven in ähnliche Lage, so wird durch die geraden Verbindungslinien korrespondierender Punkte nach §6 (9) der Projektionsträger erzeugt:

$$\begin{aligned}
 (a) \quad \xi &= (1+\lambda^2) \bar{\varphi} - 2\vartheta \\
 (6) \quad (b) \quad \eta &= (1+\lambda^2) e^{-\bar{\varphi}} \cos(\lambda \bar{\varphi} + \Phi_0) \\
 (c) \quad \zeta &= (1+\lambda^2) e^{-\bar{\varphi}} \sin(\lambda \bar{\varphi} + \Phi_0)
 \end{aligned}$$

Das isometrische Koordinatennetz §7 (10) dieser Fläche ist gegeben durch die Gleichungen:

$$\begin{aligned}
 (a) \quad X &= 2\vartheta - (1+\lambda^2) \bar{\varphi} \\
 (7) \quad (b) \quad Y &= -(1+\lambda^2)^{3/2} e^{-\bar{\varphi}}
 \end{aligned}$$

Die analytische Funktion, die die Abbildung des Projektionsträgers auf die W -Ebene vermittelt, geht über in:

$$(8) \quad W = \lim_{\xi_0 \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{Z}{\xi_0} \right)^{\xi_0}$$

Um den Grenzwert zu ermitteln, führt man neue Koordinaten ein durch:

$$\begin{aligned}
 (a) \quad \bar{X} &= \sigma \cos \bar{\omega} - \xi_0 \\
 (9) \quad (b) \quad \bar{Y} &= \sigma \sin \bar{\omega}
 \end{aligned}$$

Damit wird nach §7 (19a):

$$(10) \quad Z = (\bar{X} + \xi_0) + i \bar{Y}$$

und daraus:

$$(11) \quad \frac{Z}{\xi_0} = 1 + \frac{\bar{X} + i \bar{Y}}{\xi_0}$$

Mit

$$(12) \quad \bar{X} + i \bar{Y} = \bar{Z}$$

erhält man den Grenzwert:

$$(13) \quad \lim_{\xi_0 \rightarrow \infty} \left(\frac{Z}{\xi_0} \right)^{\xi_0} = \lim_{\xi_0 \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\bar{Z}}{\xi_0} \right)^{\xi_0} = e^{\bar{Z}}$$

Die Abbildungsfunktion (8) nimmt damit die Form an:

$$(14) \quad \boxed{W = \bar{Z}}$$

Dieses Ergebnis besagt, daß der Projektionsträger umkehrbar eindeutig auf die Ebene abgewickelt werden kann.

Das Kurvenpaar geht bei dieser Abwicklung über in die ebenen Kurven:

$$(15) \quad \begin{aligned} (a) \quad X &= -(1+\lambda^2) \bar{\varphi} \\ (b) \quad Y &= -(1+\lambda^2)^{3/2} e^{-\bar{\varphi}} \end{aligned}$$

und

$$(16) \quad \begin{aligned} (a) \quad X &= -2 - (1+\lambda^2) \bar{\varphi} \\ (b) \quad Y &= -(1+\lambda^2)^{3/2} e^{-\bar{\varphi}} \end{aligned}$$

Durch Elimination von $\bar{\varphi}$ erhält man die e-Kurven:

$$(17) \quad Y = -(1+\lambda^2)^{3/2} e^{\frac{X}{1+\lambda^2}}$$

$$(18) \quad Y = -(1+\lambda^2)^{3/2} e^{\frac{X+2}{1+\lambda^2}}$$

Ist außerdem noch $\lambda = 0$, so handelt es sich von vornherein um ein ebenes Kurvenpaar. Die Gleichungen des Paares in Kopplungslage lauten nach (1) und (2):

$$(19) \quad \begin{aligned} (a) \quad \eta &= e^{-\xi} \\ (b) \quad \eta &= -e^{2-\xi} \end{aligned}$$

Die e-Kurve ist demnach die einzige ebene Kurve, die durch kongruente Tangentenkopplung erzeugt werden kann.

Zu den bekannten Definitionsmöglichkeiten der e-Funktion kann man also noch die geometrische der kongruenten Tangentenkopplung hinzunehmen. Man kann definieren:

Die ebene Kurve, deren Tangenten aus einer kongruenten Kurve an korrespondierenden Punkten gleiche Bogenlängen heraus-schneiden, ist die e-Kurve.

Die Herleitung der Funktion nach dieser Definition ist recht einfach:

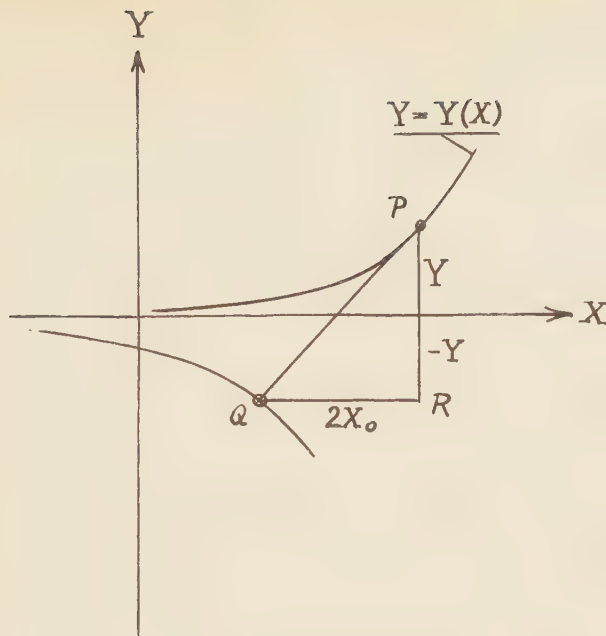


Abb. 4

Die Kurve, die der Definition genügt, sei gegeben durch die differenzierbare Funktion:

$$Y = Y(X)$$

Man denke sich die Kurve an der X-Achse gespiegelt und um $-2X_0$ parallel der X-Achse verschoben. Dann möge die Tangente in P die Spiegelkurve in dem korrespondierenden Punkt Q schneiden. (Abb. 4). Es gilt dann die Beziehung:

$$\frac{2Y}{2X_0} = \frac{dY}{dX}$$

und daraus folgt sofort:

$$Y = Y_0 e^{\frac{X}{X_0}}$$

Setzt man noch $\frac{Y}{Y_0} = \eta$ und $\frac{X}{X_0} = \xi$, so wird:

$$\eta = e^{\xi}$$

Diese Herleitung der e-Funktion ist auch für die Behandlung in der Prima einer höheren Schule geeignet.

§ 9

Tangentengekoppelte ähnliche ebene Kurvenpaare.

Einen anderen Sonderfall erhält man für $\lambda = 0$, der hier nur der Vollständigkeit halber erwähnt werden soll.

Mit

- (a) $r_0 = \frac{2}{1+\kappa}$
- (b) $\xi_0 = \frac{2}{1-\kappa}$
- (1) (c) $\alpha = \frac{1+\kappa}{2\kappa}$
- (d) $\text{tg} \bar{\phi} = \text{tg} \psi = 0$

nimmt das Gleichungssystem §5 (1) die Form an:

- (a) $\xi = \frac{2}{1-\kappa} \left(1 - e^{-\frac{1-\kappa}{2\kappa} \bar{\varphi}} \right)$
- (2) (b) $\eta = \frac{2}{1+\kappa} e^{-\frac{1+\kappa}{2\kappa} \bar{\varphi}}$

und §5 (7):

$$(a) \quad \xi = \frac{2}{1-\kappa} \left(1 - \kappa e^{-\frac{1-\kappa}{2\kappa} \bar{\varphi}} \right)$$

$$(3) \quad (b) \quad \eta = -\frac{2\kappa}{1+\kappa} e^{-\frac{1+\kappa}{2\kappa} \bar{\varphi}}$$

Durch Elimination von $\bar{\varphi}$ gehen die Gleichungen über in:

$$(4) \quad \frac{1+\kappa}{2} \eta = \left(1 - \frac{1-\kappa}{2} \xi \right)^{\frac{1+\kappa}{1-\kappa}}$$

$$(5) \quad \frac{1+\kappa}{2\kappa} \eta = -\left(\frac{1}{\kappa} - \frac{1-\kappa}{2\kappa} \xi \right)^{\frac{1+\kappa}{1-\kappa}}$$

Die ebenen Kurven, die der ähnlichen Tangentenkopplung genügen, sind also allgemeine Parabeln.

Für $\kappa = 1$ erhält man aus (4) und (5) wieder die e-Kurven §8 (19).

Die e-Kurven und die allgemeinen Parabeln sind damit eingebettet in eine drei-parametrische Raumkurvenmanigfaltigkeit, die durch ähnliche Tangentenkopplung definiert ist; sie sind also logarithmische Raumschrauben mit verschwindender Torsion.

L e b e n s l a u f .

Am 27. Juli 1907 wurde ich, Karl S t o r k, dem evangelischen Bekenntnis angehörig und im Besitz der deutschen Staatsangehörigkeit, als Sohn des Lokomotivführers Karl Stork und seiner Ehefrau Anna Maria geborene Kaspar in Montigny-lès-Metz geboren. Von 1914 bis 1919 besuchte ich die Volksschule zu Montigny und trat dann in die Oberrealschule zu Gießen ein, an der ich an Ostern 1927 die Reifeprüfung bestand.

Nach einer kurzen Tätigkeit als Steuersupernumerar beim Finanzamt zu Gießen widmete ich mich vom Wintersemester 1927/28 bis zum Sommersemester 1933 an der Landesuniversität Gießen dem Studium der Mathematik, Physik und angewandten Mathematik. Im Sommersemester 1933 bestand ich die wissenschaftliche Staatsprüfung für das höhere Lehramt in Mathematik und Physik als Hauptfächer und angewandter Mathematik als Ergänzungsfach. Die pädagogische Staatsprüfung für das höhere Lehramt legte ich im Sommer 1935 am pädagogischen Seminar der Oberrealschule zu Gießen mit Erfolg ab und wurde daraufhin zum Studienassessor ernannt.

Meine Hochschullehrer in Gießen waren die Herren Professoren: Engel, Geppert, Mohrmann, Falckenberg, Maennchen (Mathematik); König, Bothe, Gerthsen, Jaffé, Cermak, Uller (Physik); Messer, v. Aster (Philosophie).

Im Herbst 1935 ließ ich mich vom hessischen höheren Schuldienst beurlauben und war dann zunächst als Statiker und später als Entwurfsingenieur bei der Junkers Flugzeugwerke A.-G., Dessau, tätig. Nach einer kurzen Tätigkeit als wissenschaftlicher Assistent bei der Deutschen Versuchsanstalt für Luftfahrt e.V., Berlin-Adlershof, wurde ich im April 1939 mit dem Aufbau und der Leitung einer Arbeitsgruppe zur theoretischen und flugexperimentellen Erforschung der Flugeigenschaften eines Flugzeuges bei der Arado Flugzeugwerke G.m.b.H., Brandenburg/Havel, beauftragt. Im Mai 1941 übernahm ich als Abteilungsleiter den Aufbau und die Leitung der Abteilung "Aerodynamik und Flugmechanik" bei der Henschel Flugzeugwerke A.-G. Schönefeld Kr. Teltow, Nach Stilllegung des Werkes im Jahre 1945 wurde ich als Senderingenieur bei Radio Frankfurt zunächst mit der Bedienung des Senders und später mit der Durchführung hochfrequenztechnischer Berechnungen für den Neubau des 100-KW-Senders betraut.

Seit Februar 1947 bin ich als Studienassessor am Helmholtz-Realgymnasium in Frankfurt a.M. tätig. Am 1. April 1949 wurde ich zum Studienrat gewählt und in das Beamtenverhältnis berufen.

Die vorliegende Arbeit verdankt ihre Entstehung einer technischen Aufgabe, die ich bei der Henschel Flugzeugwerke A.-G. in den letzten Kriegsmonaten zu bearbeiten unternommen hatte. Auf Anregung von Herrn Prof. Dr. W. Lorey, dessen "Privates mathematisches Kolloquium" ich seit 1946 besuche, habe ich den mathematischen Teil der Arbeit weitergeführt. Herr Prof. Dr. M. Krafft hat mir während der Abfassung der Arbeit wertvolle Ratschläge erteilt und manche Hilfe zuteil werden las-

sen. Beiden Herren bin ich zu großem Dank verpflichtet.

Die Arbeit wurde am 26. Oktober 1949 durch die philosophische Fakultät der Philipps-Universität zu Marburg als Dissertation genehmigt. Die mündliche Prüfung bestand ich am 23. November 1949.

Karl S t o r k

Studienrat.

